Variables aléatoires

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$. [va029]

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$. [va030]

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la probabilité que la valeur de X soit pair. [va031]

Exercice 4

On joue avec deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 (dés non pipés). On jette un premier dé. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier. Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.

1. Établir la loi de probabilité de X.
2. Calculer son espérance mathématique et sa variance.

[va032]

Exercice 5

Trois joueurs lancent, chacun leur tour, un dé, puis recommencent dans le même ordre, jusqu'à ce qu'un joueur amène un 6. La partie s'arrête alors, le joueur qui a amené un 6 a gagné. La probabilité d'obtenir 6 est p, avec $0 < p < 1$.

1. Calculer la probabilité pour que la partie s'arrête au dixième lancer ou au r-ième lancer, $r \geqslant 1$.
2. Calculer la probabilité de gagner pour chacun des joueurs.

[va033]

Exercice 6

On pose à un étudiant une question dont il ne connaît pas la réponse. Il a le choix entre 5 réponses possibles dont une seule est la bonne. S'il se trompe, la question lui sera posée à nouveau à un autre moment.

1. En supposant que l'étudiant ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse donc de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des évènements :
   (a) L'étudiant trouve au premier essai.
   (b) L'étudiant trouve au deuxième essai.
   (c) L'étudiant trouve au troisième essai.
2. L'étudiant mémorise maintenant les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les réponses qu'il n'a pas encore essayées. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.
   (a) Quelles valeurs peut prendre X ? Déterminer sa loi de probabilité.
   (b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$: interpréter le résultat.
   (c) Déterminer la variance $V(X)$.

[va034]

Exercice 7

Dans une boîte, il y a n cartes numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir la carte n. Soit Z le nombre de tirages effectués.

1. Reconnaître quelle est la loi de Z. Calculer la probabilité que le nombre de cartes tirées soit égal à r, pour $r \geqslant 1$.
2. Quelle est la probabilité que le nombre de cartes tirées soit inférieur ou égal à 50 ?

   Application : $n = 100$.

[va035]

Exercice 8

La probabilité d'observer une maladie dans une population est 0,1. La maladie peut être détectée sans erreur par un dosage sanguin. On considère une population de 100 personnes, toutes indépendantes les unes des autres. On forme, au hasard, 10 groupes de 10 personnes. Au lieu de tester les 100 personnes individuellement, on teste le mélange des sérums d'un groupe de 10. Si le test est négatif, on considère que les 10 personnes sont saines et on est dispensé de 10 tests individuels. Si le test est positif, c'est qu'une personne au moins du groupe est atteinte de la maladie et il faut alors tester individuellement les 10 personnes du groupe ; dans ce cas, on aura dû effectuer 11 tests.

1. Soit Y le nombre de personnes malades dans un groupe. Quelle est la loi de probabilité de Y ?

   Trouver les probabilités pour que, dans un groupe, on observe :
   (a) aucune personne malade,
   (b) une et une seule personne malade,
   (c) au moins une personne malade.
2. En désignant par N le nombre total de tests à effectuer avec cette méthode de partition d'un échantillon de 100 personnes, et par X le nombre de groupes pour lequel le test est positif,
   (a) exprimer N en fonction de X.
   (b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (c) Calculer $P(N = 110)$, $P(N = 100)$.
3. Calculer le nombre moyen de tests $E(N)$ et la variance du nombre des tests $V(N)$.
4. Déterminer l'espérance mathématique et la variance du nombre N de tests à effectuer lorsqu'on partitionne les 100 personnes en n groupes égaux. Déterminer la taille n des groupes qui rend minimum l'espérance mathématique de N.

[va036]

Exercice 9

Sur un effectif de 2000 personnes, le nombre N d'individus faisant une mauvaise réaction à une injection d'un sérum suit la loi de Poisson de paramètre 2. Calculer la probabilité pour que :

1. Trois individus aient une mauvaise réaction.
2. Plus de deux individus aient une telle réaction.

[va038]

Exercice 10

Une montre subit des écarts quotidiens (positifs ou négatifs) que l'on suppose indépendants d'un jour à l'autre et qui suivent tous la même loi de moyenne nulle et de variance 16 secondes. En supposant la montre bien réglée au départ, déterminer la probabilité que l'écart sur une année (365 jours) soit inférieure à deux minutes. Déterminer un minorant de cette probabilité à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Conclusion ? [va039]

Exercice 11

Une urne contient 12 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ; on répète cette opération quatre fois de suite. On note X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules noires tirées.

1. Si on tire une boule de l'urne, quelle est la probabilité que cette boule soit noire ?
2. (a) Préciser la loi de la variable aléatoire X.
   (b) Quelles sont les valeurs prises par la variable X ? Que vaut $P(X = k)$ lorsque k est une valeur prise par X ?
   (c) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule noire.

3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev déterminer le plus petit $r > 0$ pour lequel on ait
$$P\big(|X - 4/5| \geqslant r\big) \leqslant 10^{-2}$$
Que vaut cette probabilité ?

[va040]

Exercice 12

On dispose de trois urnes numérotées $1, 2$ et 3 qui contiennent chacune deux boules.

- L'urne numéro 1 contient deux boules blanches.
- L'urne numéro 2 contient une boule blanche et une boule rouge.
- L'urne numéro 3 contient deux boules rouges.

L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne « au hasard »puis à y effectuer une succession de tirages d'une boule avec remise, jusqu'à l'éventuelle apparition d'une boule blanche.

Pour tout entier k compris entre 1 et 3, on note U_k l'évènement : « On choisit l'urne numéro k ».

Par suite, on a : $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \dfrac{1}{3}$.

On considère la variable aléatoire X égale au rang du tirage où apparaît pour la première fois une boule blanche. On attribue à X la valeur 0 si l'on obtient jamais de boule blanche.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Préciser $P_{U_1}(X = 1)$, $P_{U_2}(X = 1)$ et $P_{U_3}(X = 1)$.
   (c) En déduire la relation $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$.
2. (a) Justifier que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, on a $P_{U_1}(X = j) = 0$ et $P_{U_3}(X = j) = 0$.
   (b) Calculer, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P_{U_2}(X = j)$.
   (c) Montrer, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, la relation $P(X = j) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$.
3. Utiliser les résultats précédents pour calculer $P(X = 0)$. Proposer une interprétation de ce dernier résultat.
4. On rappelle que, pour tout réel x de $]0, 1[$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
   (a) Justifier l'existence de l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer $E(X)$.

[va041]

Exercice 13

On dispose de deux urnes contenant chacune 20 boules : une urne $\mathcal{U}_1$ avec une rouge et 19 blanches, et une urne $\mathcal{U}_2$ avec 3 rouges et 17 blanches.

On désigne par « partie »le protocole suivant : on choisit une urne de manière équiprobable, puis on tire une boule de cette urne et on note sa couleur, enfin on remet la boule tirée dans l'urne dont elle provient.

1. Ici on effectue une seule partie et on s'intéresse à l'évènement R : « La boule tirée est rouge ».
   (a) Montrer que $P(R) = \frac{1}{10}$.
   (b) Supposons avoir tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne $\mathcal{U}_1$?
2. Dans cette question le joueur effectue non pas une mais 40 parties. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il a obtenu la couleur rouge au cours de ces 40 parties.
   (a) Déterminer la loi de X. On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.
   (b) En moyenne, combien de fois le joueur obtiendra-t-il la couleur rouge en 40 parties ?
   (c) On considère que l'on peut approcher X par une variable Z qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Justifier que le paramètre de cette loi est $\lambda = 4$.
   En déduire une valeur approchée de la probabilité que le joueur ait obtenu au moins deux fois la couleur rouge au cours de ces 40 parties.

3. Dans cette question, le joueur répète les parties en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne la couleur rouge pour la $1^{\text{ère}}$ fois.

   Soit Y le rang de la partie où il obtient pour la $1^{\text{ère}}$ fois la couleur rouge.

   (a) Déterminer la loi de Y. On précisera en particulier $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout k de $Y(\Omega)$.

   (b) Préciser son espérance et sa variance.

[va042]

Exercice 14

Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de 20 questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles dont une seule est la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :
- L'élève A ne connaît que 60% de son cours.
- Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.
- Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les évènements :
- R : « L'élève A connaît la réponse à la première question ».
- J : « L'élève A répond juste à la première question ».

1. Montrer que $P(J) = \frac{11}{15}$.

   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève A aux 20 questions.

2. Reconnaître la loi de X. On donnera les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $P(X = k)$.

3. Donner $E(X)$ et $V(X)$, l'espérance et la variance de X.

4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse.

   Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.

   (a) Justifier l'égalité : $N = 3X - 40$.

   (b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

   L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.

   (a) Déterminer la loi de Y.

   (b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.

   (c) En moyenne, lequel des deux élèves suit la meilleure stratégie ?

[va044]

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur l'espace de probabilité discret (Ω, P). On définit sa fonction génératrice par :

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{P \in \mathbb{N}} P(X = k)s^k.$$

1. Montrer que G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.

2. Montrer que G_X caractérise la loi de X.

3. On suppose que X et X^2 sont intégrables. Notons G'_X et G''_X les dérivées première et seconde de G_X. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $E(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$. En déduire l'expression de $V(X)$.

[va045]
