Espaces euclidiens. Formes quadratiques.

Exercice 1

Dans l'espace euclidien $(E, (.\,|\,.))$, on considère un vecteur v non nul, un scalaire λ et l'endomorphisme :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + \lambda(x\,|\,v)v \end{array} \right.$$

1. Pour $x \in E$, calculer $\|f(x)\|^2$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que f soit une isométrie vectorielle.
3. Lorsque f est une isométrie vectorielle, dire à priori quelles sont les valeurs propres possibles de f, puis dire si elles sont effectivement valeurs propres en étudiant les espaces propres associés.
4. Lorsque f est une isométrie vectorielle, donner une interprétation géométrique de f.

[iv016]

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la rotation r d'axe $\mathbb{R}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ et telle que $r(\vec{i}) = \vec{k}$ Donner la matrice de r dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ainsi que l'angle de rotation. [iv019]

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la rotation r d'axe $\mathbb{R}(1, 1, 1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. Donner la matrice de r dans la base canonique. [iv020]

Exercice 4

On donne la matrice $A = a \begin{pmatrix} 1 & 1+b & 1-b \\ 1-b & 1 & 1+b \\ 1+b & 1-b & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(A)$.
2. Montrer que A est une matrice de rotation si et seulement si $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \pm\sqrt{3}$.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation pour $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \sqrt{3}$.

[iv021]

Exercice 5

Après avoir prouvé qu'il s'agit d'une isométrie, déterminer la nature géométrique de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté est :

a) $M = \dfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $M = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $M = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ 3 & -1 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

[iv022]

Exercice 6

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
   (a) Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^T \cdot M$;
   (b) A est symétrique et ses valeurs propres sont toutes positives.

2. Montrer qu'une telle matrice M existe et la déterminer lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[iv038]

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \frac{1}{2}(A^T + A)$.

On note α la plus petite valeur propre de B et β la plus grande.

1. Soit une colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comparer $X^T AX$ et $X^T BX$.
2. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$\alpha X^T X \leqslant X^T AX \leqslant \beta X^T X$$
3. En déduire que $\text{Sp } A \subset [\alpha, \beta]$.

[iv015]

Exercice 8

Montrer que si A est une matrice symétrique réelle et k un entier tel que $A^k = I$, alors $A^2 = I$. [iv010]

Exercice 9

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Le théorème spectral reste-t-il vrai pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
[iv012]

Exercice 10

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est : $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Expliquer sans calcul pourquoi f est diagonalisable en base orthonormée.
2. Montrer que f est une isométrie vectorielle. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. En donner une base, puis lui appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_1.
5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 satisfait $E_{-1} = (E_1)^{\perp}$. En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.
6. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale. Donner une interprétation géométrique de f.

[iv018]

Exercice 11

Que peut-on dire d'une matrice carrée réelle à la fois symétrique et orthogonale ? Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. [iv017]
