Séries numériques

Exercice 1

Étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n^2} \ ; \ v_n = \frac{1}{n^{3/2}\ln n} \ ; \ w_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \ ; \ x_n = 2^{-n^2} \ ; \ y_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

[sn013]

Exercice 2

Étude des séries $\sum u_n$ avec :

1) $u_n = \dfrac{n}{1+n^3}$ 2) $u_n = 2^{-\sqrt{n}}$ 3) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$

4) $u_n = n\sin(1/n)$ 5) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 6) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

7) $u_n = \tan^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 8) $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ 9) $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

10) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2+\ln n}$ 11) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ 12) $u_n = \dfrac{n!n^n}{(2n)!}$

13) $u_n = \dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}$ 14) $u_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$ 15) $u_n = (-1)^n n e^{-n}$

[sn014]

Exercice 3

Donner en fonction de $a \in \mathbb{R}$ la nature des séries :

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a^n n!$ 2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left[\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}\right]$ 3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{an}}{n!}$

[sn050]

Exercice 4

Convergence et somme de la série : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$.

On pourra faire une décomposition basique en éléments simples et considérer les sommes partielles. [sn018]

Exercice 5

Convergence et calcul de la série de terme général : $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$ [sn019]

Exercice 6

Convergence et calcul de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right).$$

[sn020]

Exercice 7

Nature de la *suite* de terme général $u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln k - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n$.

Indication : se ramener à l'étude de la convergence d'une série. [sn015]

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$.

1. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. On suppose que $a = e$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

   Quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$?

Correction ▼ [sn016]

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.
2. En déduire que la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
3. Justifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^n e^{-n} \qquad \text{(Formule de Stirling)}$$

Correction ▼ [sn021]

Exercice 10

On considère une série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{u\to+\infty}{=} 1 + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

1. Pour $\beta \in \mathbb{R}$ fixé, on pose

$$v_n = \ln\left((n+1)^\beta u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\beta u_n\right)$$

   Donner les valeurs de β telles que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.
2. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A n^\alpha$.

   Donner la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ en fonction de α (critère de Raabe-Duhamel).

Correction ▼ [sn022]

Correction de l'exercice 8 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$.

1. La série est à termes positifs ($a > 0$). On calcule donc :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{a^n n!} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= a e^{n \ln \frac{n}{n+1}} = a e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} a e^{-n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{e} \times e^{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{e}$.

D'après la règle de d'Alembert :

- Si $a < e$ la série $\sum u_n$ converge.
- Si $a > e$ la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

2. Si $a = e$, la règle de d'Alembert ne donne rien à priori mais :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

En considérant le second terme du développement limité, on en déduit qu'à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. Ainsi, $u_{n+1} \geqslant u_n$ à partir d'un certain rang. La suite (u_n) est positive et croissante et ne tend donc pas vers 0. En conclusion :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ diverge.}}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Nous allons transformer l'expression de v_n. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \\
&= e^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}
\end{aligned}$$

Il vient ensuite :

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln e^{-1} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} = -1 + (n+1/2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -1 + (n+1/2)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\sum v_n$ est de signe positif à partir d'un certain rang et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

Puisque $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, on peut en déduire que :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ converge.}}$$

2. De plus, $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, or on sait d'après le cours que la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\geqslant 1}$ et la série $\sum v_n$ sont de même nature (considérer les sommes partielles avec un télescopage). D'après la question précédente :

$$\boxed{\text{La suite } \big(\ln(u_n)\big)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente.}}$$

3. Notops ℓ la limite de la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\geqslant 1}$. Par continuité de l'exponentielle :

$$u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell} > 0$$

Autrement dit, $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\ell}$. En posant $C = e^{-\ell}$, on a donc prouvé le résultat suivant :

$$\boxed{\text{Il existe une constante } C > 0 \text{ telle que : } n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^n e^{-n} \qquad \text{(Formule de Stirling).}}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Commençons par arranger un peu l'expression de v_n :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\big((n+1)^{\beta}u_{n+1}\big) - \ln\big(n^{\beta}u_n\big) = \beta\ln(n+1) + \ln\big(u_{n+1}\big) - \beta\ln n - \ln\big(u_n\big) \\ &= \beta\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \end{aligned}$$

Avec les données dont on dispose, on peut en déduire un développement limité (avec des grands O) de v_n lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} v_n &\underset{n\to+\infty}{=} \beta\left(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) + \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \beta\left(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) + \left(\frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) \\ v_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha+\beta}{n} + O(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} O(\frac{1}{n^2})$ est absolument convergente, puisque par définition :

$$\alpha_n = O(\frac{1}{n^2}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists K > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\alpha_n| \leqslant \frac{K}{n^2}$$

Il vient que si $\alpha = -\beta$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge. En revanche, si $\alpha \neq -\beta$, on a :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha+\beta}{n}$$

Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ diverge car la série harmonique diverge. En conclusion :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ converge si et seulement si } \alpha = -\beta.}$$

2. On choisit par la suite $\beta = -\alpha$ afin que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge. Par télescopage, on sait que la suite $\ln\big(n^{-\alpha}u_n\big)$ est de même nature. On note ℓ la limite de cette suite. Par continuité de l'exponentielle :

$$n^{-\alpha}u_n = \exp\left[\ln\big(n^{-\alpha}u_n\big)\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell} \quad \text{d'où :} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\ell}n^{\alpha}$$

$$\boxed{\text{Il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^{\alpha}.}$$

Les série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{\alpha} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{-\alpha}}$ sont de même nature et on peut appliquer le critère des séries de Riemann :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge si et seulement si } -\alpha > 1 \text{ (i.e. } \alpha < -1).}$$
