Déterminants

Exercice 1

1. Calculer de deux façons $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$.
2. En déduire que l'ensemble E des nombres s'écrivant comme somme de deux carrés est stable par multiplication (c'est à dire que si $n, p \in E$, on a $n \times p \in E$).
3. Écrire $(2^2 + 7^2) \times (3^2 + 5^2)$ comme somme de deux carrés.

[de001]

Exercice 2

Calculer pour tous réels a, b, c : $\begin{vmatrix} b+a & b-a-c & b \\ -c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & -a+c \end{vmatrix}$ [de002]

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$. Discuter et résoudre le système : $\left\{ \begin{array}{ccc} x+y+(1+a)z & = & 2+a \\ (1+a)x+(1+a)y+z & = & 0 \\ 2x+2ay+3z & = & 2(1+a) \end{array} \right.$ [de052]

Exercice 4

Exprimer sous forme factorisée le déterminant $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{vmatrix}$. [de003]

Exercice 5

Calculer en utilisant une relation de récurrence le déterminant de taille n : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}$. [de004]

Exercice 6

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & (a_1) & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$. [de005]

Exercice 7

Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & \ddots & x_2+y_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_n+y_1 & x_n+y_2 & \cdots & x_n+y_n \end{vmatrix}$. [de054]

Exercice 8

1. Soit $A=(a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $x\in\mathbb{K}$, on pose $P(x)=\det(A+xJ)$, où J est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus 1.
2. En déduire la valeur du déterminant $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$ où a,b,c sont trois éléments de $\mathbb{K}$ avec $b\neq c$.
3. Traiter le cas $b=c$.

[de007]

Exercice 9

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ quelconques dans $\mathbb{K}$. Calculer le déterminant : $\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$. [de006]

Exercice 10

1. Soit $P,Q\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P+iQ\in\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$. En considérant l'application $t\mapsto\det(P+tQ)$, montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $P+\lambda Q\in\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que si A et B sont deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

[de008]

Exercice 11

Soit $A\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ antisymétrique et J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Justifier que $\det(A+xJ)$ est indépendant du scalaire x. [de010]

Exercice 12

Soit A une matrice antisymétrique de taille $2n+1$. Montrer que $\det A=0$.

Le résultat reste t-il vrai si la taille de la matrice est paire ? [de011]

Exercice 13

Dans l'espace vectoriel $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les applications :

$$f_1: x\mapsto(e^x+e^{-x})\cos x\ ;\ f_2: x\mapsto(e^x+e^{-x})\sin x\ ;\ f_3: x\mapsto(e^x-e^{-x})\cos x\ ;\ f_4: x\mapsto(e^x-e^{-x})\sin x\ ;$$

1. Montrer que (f_1,f_2,f_3,f_4) est une famille libre de E.
2. Soit $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3,f_4)$. Montrer que l'application : $\varphi: f\mapsto f'$ est un endomorphisme de F.
3. Calculer sa matrice dans la base (f_1,f_2,f_3,f_4) et son déterminant. Cette application est-elle un automorphisme ?
4. Mêmes questions avec $\psi: f\mapsto f-f'+\dfrac{1}{2}f''$.

[de012]

Exercice 14

Calculer le déterminant de la matrice de taille n et de coefficient d'indice (i,j) égal à $|i-j|$. [de013]