Réduction des endomorphismes

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de f.
2. Préciser les valeurs de m pour lesquelles f est diagonalisable.
3. Dans le cas $m = 2$, effectuer le calcul de A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

[re001]

Exercice 2

Expliciter les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n + v_n - w_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n - 2v_n + 2w_n \end{array}\right.$$

[re003]

Exercice 3

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{10} - \dfrac{8v_n}{10} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2u_n}{10} + \dfrac{9v_n}{10} \end{array}\right.$.

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Donner l'expression de J, J^2, J^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire l'expression de $(D + \alpha J)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. En posant le problème sous forme matricielle, donner les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

[re004]

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Mêmes questions avec B.

[re009]

Exercice 5

Soient α, β, γ trois éléments de $\mathbb{K}$ non tous nuls et A la matrice $\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une équation.
2. En déduire très simplement l'ensemble des valeurs propres de f. Justifier que f est diagonalisable.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{K}$ (qu'on précisera en fonction de α, β et γ) tel que $A^n = \alpha_n A$.

[re006]

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\chi_{A^T} = \chi_A$.
2. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^T est diagonalisable.
3. Montrer que si A est diagonalisable, alors $I + A + A^2$ est diagonalisable.

[re007]

Exercice 7

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P) = P - (X-1)P'$.

1. Justifier que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres de φ et en déduire que φ est diagonalisable.

[re005]

Exercice 8

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

[re008]

Exercice 9

1. Montrer que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent et si les valeurs propres de A sont simples, alors tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B.
2. Dans cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = A$.
   (a) Trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $P^{-1}AP = D$.
   (b) Montrer que A et M commutent.
   (c) En déduire que l'équation est équivalente à une équation du type $\Delta^2 = D$, où Δ est une matrice diagonale. Conclure.
3. Adapter la méthode à la résolution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de l'équation :

$$X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

[re002]

Exercice 10

Soit $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$: $D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$. En déduire D_n.
2. Montrer que pour tout entier n : $\Delta_n = \Delta_{n-2}$. En déduire Δ_n.

[re011]