Sujets : Réduction des endomorphismes.

Énoncés des sujets :

Exercice 1

Dans l'ensemble de l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

1. Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$, on considère la matrice A à coefficients réels définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a+c & 0 & c \\ 0 & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+c \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer le spectre de A.

   (b) Montrer que A est diagonalisable.

   (c) Déterminer une matrice D diagonale, de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telles que :
$$P^{-1}AP = D.$$

   (d) Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On veut résoudre l'équation matricielle :
$$AN = NA \quad (E_1)$$
   d'inconnue N.
   Montrer que N est solution de (E_1) si et seulement si la matrice N' définie par $N' = P^{-1}NP$ est solution de l'équation :
$$DN' = N'D \quad (E_2)$$

   (e) On suppose dans cette question et dans la suivante que $c \neq 0$.
   Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de (E_2).

   (f) Exprimer les solutions de (E_1) à l'aide des matrices P et P^{-1}. On ne demande pas le détail des coefficients des matrices N solutions de (E_1).

2. Soit l'ensemble $F = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+b+c \end{pmatrix} \;;\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer une base de F et la dimension de F.
   Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on va désormais étudier certaines propriétés de $M(a, b, c)$, élément quelconque de F.

   (c) Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a, b, c)$, associé à une valeur propre que l'on déterminera.
   On note λ_1 cette valeur propre.

   (d) Calculer le polynôme caractéristique de $M(a, b, c)$ sous forme factorisée.
   Indication : faire apparaître le coefficient $X - \lambda_1$ dans le polynôme caractéristique $P(X)$, à l'aide d'une opération élémentaire très simple sur les lignes et les colonnes.
   On pourra utiliser la relation $b^2 - bc + c^2 = \left(b - \frac{1}{2}c\right)^2 + \frac{3}{4}c^2$.

   (e) À quelles conditions sur le triplet (a, b, c), la matrice $M(a, b, c)$ admet-elle une valeur propre triple ?
   Dans ce cas, la matrice $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable ?

   (f) À quelles conditions portant sur le triplet (a, b, c) la matrice $M(a, b, c)$ admet-elle une valeur propre double non triple ?

Correction ▼ [re1]

Exercice 2

Partie I. Décomposition de Dunford : généralités

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n et 0_n respectivement la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, s'il existe $\Delta, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

i) $A = \Delta + N$,

ii) Δ est diagonalisable,

iii) N est nilpotente (i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$).

iv) $\Delta N = N\Delta$, autrement dit les matrices Δ et N commutent,

Alors on dira que le couple (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A.

1. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   1a. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A_1.

   1b. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) n'est pas une décomposition de Dunford de A_2.

2. Soit A_3 une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_3 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.
3. Soit A_4 une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A_4 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.
4. Vérifier que si (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A, alors Δ et N commutent avec A.

Partie II. Décomposition dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\chi_A(x) = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A$.
2. On suppose que $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A > 0$. Montrer que A admet une décomposition de Dunford qu'on précisera.
3. On suppose que $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A = 0$. Montrer que A admet une décomposition de Dunford qu'on précisera en fonction de A, I et $\operatorname{tr}(A)$.
4. On suppose que $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A < 0$. On va montrer par l'absurde que A n'admet pas de décomposition de Dunford. On suppose que :

$$A = \Delta + N$$

   où Δ est diagonalisable, N nilpotente, et $\Delta N = N\Delta$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.

   4a. Montrer que si λ est une valeur propre de N et X un vecteur propre associé, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ N^k X = \lambda^k X$.

   4b. En déduire que 0 est la seule valeur propre possible de N.

   4c. Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   puis que $N^2 = 0$.

   4d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de Δ. On note $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Montrer que

$$A(NX) = \lambda(NX)$$

   En déduire que λ est valeur propre de A. Conclure.

Partie III. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on pose $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Étude de Δ

   1a. Déterminer le spectre de Δ, et en déduire que Δ est inversible.

   1b. Montrer que Δ est diagonalisable et la diagonaliser sous la forme $P^{-1}\Delta P = D$, avec $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1c. En déduire, de manière élémentaire, que Δ^{-1} est diagonalisable et exprimer Δ^{-1} en fonction de P, P^{-1} et d'une matrice diagonale D_1 à déterminer.

2. Décomposition de A.
   2a. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
   2b. Montrer que N est nilpotente.
   2c. Vérifier qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ (à préciser) tel que $N\Delta = \Delta N = \alpha N$.
   2d. En déduire que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.
3. Décomposition de Dunford de A^{-1}.
   On pose $N_1 = \Delta^{-1}N$.
   3a. À l'aide de III.2c, montrer que $\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}$.
   3b. En déduire que N_1 est nilpotente.
   3c. Développer $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1)$. En déduire que $I_3 + N_1$ est inversible et donner son inverse.
   3d. Justifier l'existence de A^{-1}.
   3e. Montrer que $A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}$ et en déduire une décomposition de Dunford de A^{-1}.
4. Décomposition de Dunford des puissances de A.
   Soit $p \in \mathbb{N}$.
   4a. À l'aide de la décomposition de Dunford (Δ, N) de A, montrer que
   $$A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N.$$
   4b. Vérifier que $(\Delta^p, p2^{p-1}N)$ est une décomposition de Dunford de A^p.
   4c. Calculer Δ^p. En déduire que
   $$A^p = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 2+p & -p & p \\ 1+p-2^p & 1-p+2^p & p-1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}$$
5. Décomposition de Dunford de R vérifiant $R^2 = A$, R s'appelle une racine carrée de A.
   5a. Déterminer les matrices $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $U^2 = D$.
   5b. À l'aide des matrices P et P^{-1}, déterminer alors une matrice S à **valeurs propres positives** telle que $S^2 = \Delta$.
   5c. Déterminer deux réels a et b tels que $S = a\Delta + bI_3$, en raisonnant sur les formes diagonalisées. En déduire que S et N_1 commutent.
   5d. On pose $M = I_3 + \frac{1}{2}N_1$. Montrer que $M^2 = I_3 + N_1$.
   5e. En remarquant que $A = \Delta\big(I_3 + \Delta^{-1}N\big)$, déterminer une matrice R telle que $R^2 = A$.
   5f. Donner une décomposition de Dunford de R.

Correction ▼ [re2]

Exercice 3

Partie I.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices U, V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$, vérifiant :

$$\begin{aligned} A &= \lambda U + \mu V && (1) \\ A^2 &= \lambda^2 U + \mu^2 V && (2) \\ A^3 &= \lambda^3 U + \mu^3 V. && (3) \end{aligned}$$

1. Exprimer U et V en fonction de A et A^2. En déduire que :
$$A^3 = (\lambda + \mu)A^2 - \lambda\mu A.$$
2. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$:
$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V.$$

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. On note $f^p = f \circ \cdots \circ f$ la p$^{\text{ième}}$ composée de f. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^p$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
   $$\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda+\mu)f^p(x) - f^{p+1}(x).$$
   (c) En déduire que $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f$.
   (d) Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^p)$.

Partie II.

On donne toujours un entier $n \geqslant 1$ fixé.

Soient U et V des matrices colonnes *non nulles*. On note : $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = aI_n + UV^T.$$

1. Montrer que V^TU est un réel que l'on exprimera en fonction des coefficients u_i et v_i.
2. Montrer qu'il existe un réel k tel que $(UV^T)^2 = k(UV^T)$.
   En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.
3. On note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Donner l'expression de $a_{i,j}$ en fonction de a et des coefficients de U et V.
   En déduire que $\operatorname{Tr}(A) = na + V^TU$.
4. Exprimer α et β en fonction de a et $\operatorname{Tr}(A)$.
5. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2. En déduire que λ vérifie l'équation
   $$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0.$$
6. Montrer que les seules valeurs propres possibles de A sont :
   $$\lambda_1 = a \quad \text{et} \lambda_2 = \operatorname{Tr}(A) - (n-1)a.$$
7. On suppose que $\operatorname{Tr}(UV^T) \neq 0$ et on considère les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 définis par :
   $$E_i = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ AX = \lambda_i X\}.$$
   (a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.
   (b) Montrer par analyse-synthèse que, pour tout vecteur colonne X, il existe $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ tels que $X = X_1 + X_2$.
   (c) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

Correction ▼ [re3]

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Calculer les valeurs propres de u et justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de u avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Déterminer, pour chaque $i \in \{1,2,3\}$, le vecteur $\overrightarrow{e_i}$ de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et vérifiant $u(\overrightarrow{e_i}) = \lambda_i \overrightarrow{e_i}$.
3. Justifier que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice Δ de u relativement à cette base, puis trouver une relation entre A et Δ.
4. Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $B^2 = A$, on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.
   (a) Vérifier que $v^2 = u$ et que $u \circ v = v \circ u$.
   (b) Pour chaque $i \in \{1,2,3\}$, calculer $u \circ v(\overrightarrow{e_i})$, et en déduire que $v(\overrightarrow{e_i})$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_i}$.

(c) Conclure que la matrice V de v relativement à la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est diagonale de la forme $V = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et en déduire les valeurs possibles de α_1, α_2, et α_3.

5. Expliquer comment on trouve toutes les solutions, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de l'équation $X^2 = A$.

Correction ▼ [re4]

Exercice 5

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B. Est-ce que B est diagonalisable ?
   (b) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que $B = PDP^{-1}$.
   (c) Exprimer D^2 comme combinaison linéaire de D et de I et en déduire B^2 comme combinaison linéaire de B et I.
   (d) Déduire de la question précédente que B est inversible, et exprimer B^{-1} comme combinaison linéaire de B et I.

   On considère l'application

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & h(M) = AMB \end{array} \right.$$

2. Vérifier que h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que h est bijectif et exprimer h^{-1} sous une forme analogue à celle donnée pour h.
4. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.
   (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $N = MP$, où P est la matrice définie à la question 1b. Montrer que :
   $h(M) = \lambda M \iff AND = \lambda N$, où D est la matrice définie dans la question 1b.
   (b) Déterminer les réels λ pour lesquels il existe une matrice N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AND = \lambda N$. À cet effet, on pourra noter $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire les valeurs propres de h. Montrer que h est diagonalisable et donner une matrice diagonale représentant h.
   (d) On note id l'endomorphisme identité et 0 l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(h - id) \circ (h + id) \circ (h - 4id) \circ (h + 4id) = 0$$

Correction ▼ [re5]

Exercice 6

Soient a, b et c trois réels fixés. On définit par récurrence la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$v_0 = a,\ v_1 = b,\ v_2 = c \text{ et pour tout } n \geqslant 0,\ v_{n+3} = \frac{v_{n+2} + v_{n+1} + v_n}{3}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on définit le vecteur $V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}$.

On définit également : $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $V_{n+1} = AV_n$.
   En déduire par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $V_n = A^n V_0$.
2. (a) Montrer que 1 est valeur propre de la matrice A.
   (b) Déterminer les deux autres valeurs propres (que l'on notera λ_2 et λ_3) de la matrice A.
   Sont-elles réelles ? Calculer leur module.

(c) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

3. (a) Montrer que si n est un entier supérieur à 1, les trois valeurs propres de A^n sont $1, \lambda_2^n$ et λ_3^n.

(b) En déduire qu'il existe trois nombres complexes α, β et γ (que l'on ne cherchera pas à calculer) tels que pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = \alpha + \beta\lambda_2^n + \gamma\lambda_3^n.$$

(c) Montrer que pour tout $x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, $\lim_{n\to+\infty} x^n(v_n - \alpha) = 0$.

Montrer que la suite (v_n) converge vers α et que $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. On pose pour tout $n \geqslant 0$, $w_n = v_n + 2v_{n+1} + 3v_{n+2}$.
Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $w_{n+1} = w_n$ et en déduire que :

$$\alpha = \frac{a + 2b + 3c}{6}.$$

Correction ▼ [re6]

Exercice 7

On rappelle que si p est un entier naturel non nul, la notation $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. La partie A est indépendante du reste du problème, mais les parties B et C sont liées.

Partie A :

Soit p un entier naturel non nul. Une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice trois** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans toute cette partie, on note A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice trois. On note I la matrice unité d'ordre p.

Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

A.1 Vérifier la relation

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)E(t) = E(s+t).$$

A.2 En déduire par récurrence sur n que $\big(E(t)\big)^n = E(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

A.3 Justifier que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?

A.4 Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

A.5 En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est injective.

A.6 Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est nilpotente d'indice 3 et expliciter la matrice $E(t)$.

Partie B :

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

B.1 Calculer les valeurs propres de f.

B.2 En déduire que f est diagonalisable et donner une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de diagonalisation.

B.3 En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
Expliciter P, D et P^{-1}.

B.4 Expliciter D^n pour tout entier naturel n. Démontrer la relation $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression de A^n.

Partie C :

On reprend les notations de la partie B. On rappelle que pour tout réel t, on a $e^t = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right)$.

C.1 Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$$

avec la convention $A^0 = I$. On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t), b_n(t), c_n(t), d_n(t)$.

C.2 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, avec :

$$a(t) = \lim_{n \to +\infty} a_n(t) \quad ; \quad b(t) = \lim_{n \to +\infty} b_n(t) \quad ; \quad c(t) = \lim_{n \to +\infty} c_n(t) \quad ; \quad d(t) = \lim_{n \to +\infty} d_n(t).$$

Expliciter la matrice $E(t)$ (on vérifiera qu'on obtient $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$).

C.3 Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre deux) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E(t) = e^{2t} Q + e^t R$$

et expliciter Q et R.

C.4 Calculer les endomorphismes Q^2, R^2, QR, RQ. Que peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices Q et R (donnez une réponse très précise) ?

C.5 En déduire que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)E(t) = E(s+t).$$

Que dire de $\big(E(t)\big)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$? de $\big(E(t)\big)^{-1}$?

L'application $E : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & E(t) \end{array} \right.$ est-elle injective ?

Correction ▼ [re7]

Exercice 8

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est à dire qui vérifient la relation :

$$M.M^T = M^T.M \quad (1)$$

Partie I :

Dans toute cette partie, les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est à dire ayant deux lignes, deux colonnes et des coefficients réels.

On notera en particulier $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1).
2. Calculer A^2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, A^n vérifie la relation (1).
3. Montrer que A est inversible. On note u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est A.
4. Préciser les valeurs de $u(\vec{i})$ et $u(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Montrer que u est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

   Dans toute la suite, on notera $U = A + I$.
5. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad U^n = \alpha_n U$.

   En déduire que toutes ses puissances U^n, $n \in \mathbb{N}^*$, vérifient (1).

   On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).
6. Calculer les produits de la matrice $A+C$ et de sa transposée. En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Étant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2.

   On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2.

8. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont on précisera pour chacun une base.
9. Étant donné M et N deux matrices de E_2, a-t-on nécessairement $M.N \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

Partie II :

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\, \overrightarrow{k})$.

On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\overrightarrow{i}) = -\overrightarrow{k}$, $h(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$ et $h(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{j}$. On note $S = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(h)$.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_3.

10. Représenter la matrice S.
11. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3.
12. Montrer que pour tous réels a, b et c, la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3.
13. En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que l'on notera F.
14. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

Partie III :

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $\mathcal{B}'' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$.

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

où a est un réel quelconque, et on appelle u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}''}(u) = B$.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4.

15. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$. Dans la suite, on pose $a = -1$.
16. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.
17. Montrer que $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4}$ et $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}$ sont des vecteurs propres de u associés à la même valeur propre. Quelle est la valeur propre associée ?
18. Déduire des questions précédentes la dernière valeur propre et déterminer un vecteur propre associé.
19. En déduire l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $B = P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale. Préciser P et Δ.
20. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et B^2.

Correction ▼ [re8]

Exercice 9

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Réduction de la matrice A.
   1.1 Déterminer les valeurs propres de A.
   Celles-ci seront notées λ_1 et λ_2 avec : $\lambda_1 > \lambda_2$.
   1.2 Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
   1.3 Notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
   Déterminer une matrice inversible P appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   2.1 Dans cette question, nous supposons que : $N^2 + N = D$.
      21.1 Montrer que : $ND = DN$, et en déduire que : $y = z = 0$.
      21.2 Prouver alors que : $\begin{cases} t^2 + t = 2 \\ x^2 + x = 6 \end{cases}$.

21.3 En déduire les quatre valeurs possibles pour la matrice N.

2.2 Montrer que les quatre matrices N obtenues à la question 2(1)3 vérifient l'égalité matricielle : $N^2+N=D$.

3. Soit M appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notons : $N=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, x,y,z,t appartenant à $\mathbb{R}$, la matrice appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $N=P^{-1}MP$.

3.1 Calculer P^{-1} et déterminer ensuite une expression de M en fonction de x,y,z et t.

3.2 Montrer que : $M^2+M=A \iff N^2+N=D$.

3.3 En déduire l'ensemble des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2+M=A$$

Correction ▼ [re9]

Exercice 10

On définit, pour tout réel a, la matrice :

$$M_a=\begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$$

1. (a) Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle inversible ?
   (b) Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de la matrice M_a.
2. Donner une base de chacun des sous-espaces propres de la matrice M_a.
3. Donner une matrice P inversible, de taille 2×2, telle que la matrice $D_a=P^{-1}M_aP$ est diagonale. Calculer P^{-1} en détaillant les calculs.
4. Soit a et b deux nombres réels. Montrer que $M_aM_b=M_bM_a$.
5. Soit n un entier naturel non nul. On considère la matrice A_n suivante :

$$A_n=M_1M_2M_3\dots M_n$$

obtenue en effectuant le produit des n matrices $M_1,M_2,\dots,M_n$. Donner, en fonction de n, quatre nombres réels a_n,b_n,c_n,d_n tels que :

$$A_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

6. On considère deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $u_1=-2$, $v_1=4$ et qui vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=(n-1)u_n-v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1}=2u_n+(n+2)v_n.$$

Donner, en fonction de n, une expression du terme général u_n de la suite.

Correction ▼ [re10]

Exercice 11

On note $E=\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P\in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X)=-3XP(X)+X^2P'(X),\quad \text{où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P.$$

1. (a) Rappeler la dimension de E.
   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (c) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E.
   (d) La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, M^n.
   (e) Préciser le noyau $\operatorname{Ker} f$ de f, ainsi qu'une base de $\operatorname{Ker} f$.
   (f) Déterminer l'image $\operatorname{Im} f$ de f.
2. On note Id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0=\mathrm{Id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k=v\circ v^{k-1}$.
   Soit u et g deux endomorphismes de E tels que $u^4=0_E$, $u^3\neq 0_E$ et $g=\mathrm{Id}_E+u+u^2+u^3$.

(a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \operatorname{Ker}(u^3)$. Montrer que la famille $\big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de E.

(b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

(c) Établir l'égalité : $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$.

(d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

Correction ▼ [re11]

Exercice 12

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E, F un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.
On rappelle qu'on dit que F est stable par f si et seulement si $\forall \overrightarrow{x} \in F,\ f(\overrightarrow{x}) \in F$.

I **Quelques calculs préliminaires.**

Considérons la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3.

I.1 Étude des éléments propres de M.

I1.a Déterminer les (ou la) valeurs propres de M.

I1.b Déterminer les sous-espaces propres de M.

I.2 Étude des éléments propres de M^T.

I2.a Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Justifier, ***sans faire de calculs***, que les matrices M et M^T ont le même polynôme caractéristique. En déduire les valeurs propres de M^T.

I2.b Déterminer les sous-espaces propres de M^T.

II **Quelques généralités.**

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E.

II.1 Montrer que $\{\overrightarrow{0}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E stables par f.

II.2 Soit F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\overrightarrow{0}$ et de dimension finie. Notons p la dimension de F et introduisons $\mathcal{B}_F = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une base de F.

Montrer que F est stable par f si et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(\overrightarrow{u_k}) \in F$.

II.3 Droites vectorielles stables par f.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 1, et $\mathcal{B}_F = (\overrightarrow{u})$ une base de F.

Montrer que F est stable par f si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de f.

III **Étude des plans stables en dimension 3.**

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, dont une base est $\mathcal{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Soit f un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}_E$.

III.1 Mise en place de l'équation de F dans la base $\mathcal{B}_E$.

Soit $\mathcal{B}_F = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ une base de F.

III1.a Justifier l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{u_3}$ de E tel que la famille $\mathcal{U}_E = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ soit une base de E.

III1.b On introduit la matrice de passage Q de la base $\mathcal{U}_E$ à la base $\mathcal{B}_E$ (attention à l'ordre des bases !) que nous noterons :

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Montrer que a, b et c sont non tous nuls.

III1.c Soit $\overrightarrow{x}$ appartenant à E.

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}_E$,

et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{U}_E$.
Rappeler le lien matriciel entre Q, X et X' et en déduire que :

$$x'_3 = ax_1 + bx_2 + cx_3$$

III1.d En déduire que pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ appartenant à E de composantes (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}_E$:

$$\overrightarrow{x} \in F \quad \Longleftrightarrow \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

La condition $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ est appelée *l'équation de F dans la base $\mathcal{B}_E$*, nous admettrons qu'elle est indépendante du choix de la base $\mathcal{U}_E$.

III.2 Condition nécessaire et suffisante de stabilité de F par f.

III2.a Dans cette question, nous supposerons F stable par f.
Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{U}_E$, matrice que nous noterons B dans la suite, est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \gamma \in \mathbb{R}$$

Justifier l'égalité $Q^T B^T = A^T Q^T$, et en déduire que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A^T.

III2.b Réciproquement, on suppose que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A^T, de valeur propre λ.
Justifier l'égalité matricielle $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times A = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.
Soit $\overrightarrow{x}$ appartenant à E.
Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}_E$,
et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $f(\overrightarrow{x})$ dans la base $\mathcal{B}_E$.
Montrer que $ay_1 + by_2 + cy_3 = \lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3)$. En déduire que F est stable par f.

IV Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, dont une base est $\mathcal{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Soit f un endomorphisme de E de matrice M dans la base $\mathcal{B}_E$, avec :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

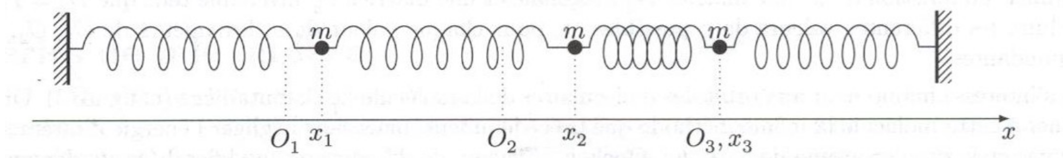
Déterminer les sous-espaces vectoriels de E stables par f (on pourra utiliser les résultats des questions I,II et III).

Correction ▼ [re12]

Exercice 13

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$.
   (b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $a_0, \ldots, a_N$ dans $\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P \left(\sum_{k=0}^{N} a_k B^k \right) P^{-1}$.
   (c) Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k B^k$ lorsque B est la matrice diagonale : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

2. On considère dans la suite les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
   Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base.
   (c) Justifier que toute matrice $M(a,b,c)$ de $\mathcal{F}$ est diagonalisable.
   (d) Exprimer A^2 en fonction de J et de I.
   (e) Soit $M(a,b,c)$ appartenant à $\mathcal{F}$. Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I, A et A^2.
   (f) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de $M(a,b,c)$.
3. **Application en physique**
   On considère un système de 3 oscillateurs couplés, où les 4 ressorts sont identiques et de constante de raideur k. Les positions des masses m sont repérées par leurs abscisses x_1, x_2 et x_3 à partir de leur position d'origine respective O_1, O_2 et O_3, positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus. On suppose qu'on lâche les masses aux abscisses x_{1m}, x_{2m} et x_{3m} sans vitesse initiale.



   On montre, en appliquant le principe fondamental de la dynamique et en posant $\omega_0^2 = k/m$ (avec $\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$), que les abscisses x_1, x_2 et x_3 vérifient le système différentiel

$$(S_1) : \begin{cases} x_1''(t) &= -2\omega_0^2 x_1(t) + \omega_0^2 x_2(t) \\ x_2''(t) &= \omega_0^2 x_1(t) - 2\omega_0^2 x_2(t) + \omega_0^2 x_3(t) \\ x_3''(t) &= \omega_0^2 x_2(t) - 2\omega_0^2 x_3(t) \end{cases}$$

   On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une matrice M telle que (S_1) s'écrive $X''(t) = MX(t)$.
   (b) Exprimer cette matrice M en fonction de A et de I.
   (c) En déduire une matrice D' diagonale et une matrice P' inversible telles que $M = P'D'P'^{-1}$.
   (d) Résoudre alors le système (S_1), c'est à dire déterminer les expressions de x_1, x_2 et x_3 en fonction de t et des conditions initiales x_{1m}, x_{2m} et x_{3m}.

Correction ▼ [re13]

Exercice 14

Définitions et notations utilisées :

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

- On note Id l'application identique de E.
  Soient f et g deux endomorphismes de E ; on note $f \circ g$ la composée de f et de g.
  On convient que $f^0 = \mathrm{Id}$, $f^1 = f$, et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on pose $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.
- Soit f un endomorphisme de E.
  On dit que f est cyclique, si et seulement si, il existe un vecteur a de E tel que $\left(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{n-1}(a)\right)$ soit une base de E.
  Par exemple, si $n = 2$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur a de E tel que $\left(a, f(a)\right)$ soit une base de E.
  De même, si n $= 3$, dire que f est cyclique revient à dire qu'il existe un vecteur a de E tel que $\left(a, f(a), f^2(a)\right)$ soit une base de E.

- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P.

  La première partie du problème est consacrée à l'étude d'exemples.

  La seconde partie propose l'étude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Elle est totalement indépendante de la première partie.

Partie I. Étude d'exemples.

I.A. On considère dans cette section I.A. que $E = \mathbb{R}^2$.

Soit α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

I.A.1. On choisit $a = (2, 3)$. Déterminer le vecteur $\alpha(a)$ et montrer que α est cyclique.

I.A.2. Déterminer le vecteur $\alpha^2(a)$ puis déterminer deux réels x et y tels que :

$$\alpha^2(a) = xa + y\alpha(a)$$

I.A.3. Déterminer la matrice A' de α dans la base $\big(a, \alpha(a)\big)$.

I.A.4. Montrer que le réel 2 est une valeur propre de α.

I.A.5. Déterminer un vecteur b non nul de $\mathbb{R}^2$, tel que $\big(b, \alpha(b)\big)$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$.

On donnera les coordonnées du vecteur b que l'on aura choisi dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

I.B. On considère dans cette section I.B. que $E = \mathbb{R}^3$. Soit β l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

I.B.1. Déterminer le polynôme caractéristique de β.

I.B.2. Montrer que β est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$

I.B.3. Déterminer une base de chacun des sous espaces propres de β.

En déduire que β est diagonalisable, puis donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de β soit la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

I.B.4. Montrer que $\beta^2 - 3\beta + 2\,\mathrm{Id} = 0$ où 0 désigne ici l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

I.B.5. En déduire que β n'est pas cyclique.

I.C. On considère dans cette section I.C. que $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit γ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le polynôme P'.

On admettra que γ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on ne demande pas de le vérifier.

On a donc par exemple : $\gamma\big(X^2 - 3X + 1\big) = 2X - 3$.

I.C.1. Déterminer $\gamma\big(X^{n-1}\big)$ et plus généralement $\gamma^k\big(X^{n-1}\big)$ pour tout entier k compris au sens large entre 1 et $n-1$.

On effectuera un raisonnement par récurrence sur k.

I.C.2. En déduire que γ est cyclique.

Partie II

Dans cette partie, on se donne un entier n supérieur ou égal à 2.

On considère l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

On admettra que δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on ne demande pas de le vérifier.

On a donc par exemple : $\delta\big(X^2 - 3X + 1\big) = \big((X+1)^2 - 3(X+1) + 1\big) - \big(X^2 - 3X + 1\big)$.

On rappelle également le résultat suivant que l'on pourra utiliser sans avoir à le démontrer : soit $\big(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}\big)$ une famille de polynômes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ telle que pour tout entier i compris au sens large entre 0 et $n-1$, $\deg(Q_i) = i$.

Alors, la famille $\big(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II.A. Dans cette question, on montre que δ est cyclique.

II.A.1. Soit k un entier naturel compris au sens large entre 1 et $n-1$.

En utilisant la formule du binôme, montrer que le polynôme $\delta\big(X^k\big)$ est exactement de degré $k-1$.

II.A.2. Soit maintenant P un élément quelconque de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, le polynôme P étant supposé de degré supérieur ou égal à 1.

En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $\deg\big(\delta(P)\big) = \deg(P) - 1$.

II.A.3. Montrer enfin que δ est cyclique en considérant la famille

$$\Big(X^{n-1}, \delta\big(X^{n-1}\big), \delta^2\big(X^{n-1}\big), \cdots, \delta^{n-1}\big(X^{n-1}\big)\Big).$$

II.B. Dans cette question, on détermine le noyau et l'image de l'endomorphisme δ.

II.B.1. En utilisant le résultat de la question II.A.2., montrer que le noyau de l'endomorphisme δ est constitué de l'ensemble des polynômes constants.

II.B.2. Montrer que l'image de l'endomorphisme δ est contenue dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

II.B.3. En utilisant le théorème du rang, montrer finalement que l'image de l'endomorphisme δ coïncide avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

II.C. Dans cette question, on introduit une famille de polynômes $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, qui va permettre de démontrer d'une autre manière que δ est cyclique. On définit les polynômes $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ en posant :

$$P_0(X) = 1 \quad , \quad P_1(X) = \frac{1}{1!}X \quad , \quad P_2(X) = \frac{1}{2!}X(X-1), \ldots$$

$$P_{n-1}(X) = \frac{1}{(n-1)!}X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+2).$$

On a donc, pour tout entier j compris au sens large entre 1 et $n-1$,

$$P_j(X) = \frac{1}{j!}X(X-1)(X-2)\cdots(X-j+1) = \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X-k).$$

II.C.1. Montrer que $\big(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}\big)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II.C.2. Dans cette question et dans cette question seulement, on suppose que $n = 4$.

Déterminer les coordonnées du polynôme $X^3 - 5X^2 + X - 3$ dans la base $\big(P_0, P_1, P_2, P_3\big)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Indication : on pourra remarquer que 0 est racine de P_1, P_2 et P_3, puis que 1 est racine de P_2 et P_3,...

II.C.3. Soient i et j deux entiers naturels, tels que : $i \neq 0$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Montrer que $\delta\big(P_j\big) = P_{j-1}$ puis déterminer $\delta^i\big(P_j\big)$ en distinguant les cas $i \leqslant j$ et $i > j$.

On donnera le résultat sans avoir besoin de le justifier.

II.C.4. En déduire une autre démonstration du fait que δ est cyclique.

Correction ▼ [re14]

Exercice 15

On note I et A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \; ; \; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

PARTIE I : Étude de la matrice A.

1. Calculer A^2.
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
3. (a) Calculer le polynôme caractéristique de A et justifier que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$.

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
6. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.
   On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.
7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.
9. (a) Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.
   (b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.
   (c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
10. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?
11. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
12. (a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$ d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.
    (b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$ d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

Correction ▼ [re01]

Exercice 16

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \geqslant 2$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans tout l'exercice M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1, on note $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace.

1. Exemples en petite taille.
   (a) Donner, en complétant les coefficients de la matrice suivante $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle dans chacun des cas suivants :
   i) $\mathrm{rg}(A) = 1$ ii) $\mathrm{rg}(A) = 2$ iii) $\mathrm{rg}(A) = 3$.
   (b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
2. Existence d'un polynôme annulateur.
   Les colonnes d'une matrice de rang 1 sont toutes proportionnelles à une même colonne, ainsi les coefficients $m_{i,j}$ de la matrice M sont de la forme $\alpha_i\beta_j$ avec α_i et β_j des scalaires dans $\mathbb{K}$.
   Déterminer deux matrices colonnes X et Y de taille n telles que $M = XY^T$. En déduire que :
   $$M^2 = \lambda M \quad \text{avec} \quad \lambda = \mathrm{Tr}(M).$$
3. La trace est valeur propre.
   Dans la suite de l'exercice, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont M est la matrice dans la base de $\mathbb{K}^n$.
   (a) Démontrer à l'aide de l'égalité précédente que la matrice $M - \lambda I_n$ est non inversible.
   (b) En déduire qu'il existe un vecteur a non nul de $\mathbb{K}^n$ tel que $u(a) = \lambda a$.
4. Diagonalisation de M lorsque $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
   On suppose que $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
   (a) Démontrer que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Vect}\{a\}$.
   (b) En déduire que la matrice M est diagonalisable et préciser une matrice diagonale à laquelle elle est semblable.
5. Si M est de trace nulle, montrer que M n'est pas diagonalisable.
6. **Application.** Montrer que la matrice :
   $$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
   est diagonalisable, et préciser D et P telle que $D = P^1 JP$ est diagonale.

Correction ▼ [re02]

Exercice 17

On se propose d'étudier, dans des cas particuliers, les puissances et racines carrées de certains endomorphismes. Les deux parties A et B du sujet sont indépendantes.

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est diagonalisable.
2) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) et un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.
4) Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
5) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).
6) Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
7) Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.
2) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{Id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
3) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.
4) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$, et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.
5) Après avoir calculé $p^2, q^2, p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.
6) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et q dans cette nouvelle base.
7) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.
8) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.
9) Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Correction ▼ [re03]

Exercice 18

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3 : $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère, pour tout réel a, la matrice carrée réelle d'ordre 3 :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

b) Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice réelle diagonale et une matrice réelle P inversible telle que $J = PDP^{-1}$.

c) En déduire que, pour tout nombre réel a, il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre 3 que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.

d) Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?

2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice X carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.

   a) Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre 3 telle que $X^2 = M_a$.

   (i) Montrer que X commute avec M_a, puis que X commute avec J.

   (ii) On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de f est vecteur propre de h.

   (iii) Établir qu'il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer que $\Delta^2 = D_a$.

   (iv) En déduire $a \geqslant 2$.

   b) Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle X d'ordre 3 telle que $X^2 = M_a$.

   c) Conclure.

Correction ▼ [re04]

Exercice 19

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de E. On considère une matrice A de E telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.

1. Propriétés de A.

   1a. Soit un réel $\lambda \neq 0$ et X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = \lambda X$.
   Montrer que $X = 0$. En déduire que $\mathrm{Spec}(A) \subset \{0\}$.

   1b. Calculer le déterminant de A. En déduire que $\mathrm{Spec}(A) = \{0\}$.

   1c. Montrer par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

   2a. Que vaut $f^2 = f \circ f$? En déduire que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.

   2b. En déduire, à l'aide du théorème du rang, que $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dfrac{p}{2}$, puis que le rang de A vaut nécessairement 1 pour $p = 3$.

   2c. Montrer qu'il existe dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice M de première colonne nulle vérifiant $M \neq 0$ et $M^2 = 0$.

3. On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{\alpha A + \beta I \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(A, I)$$

   3a. Déterminer la dimension de F.

   3b. Montrer que F est stable par produit, c'est à dire $\forall (M, N) \in F^2, \quad MN \in F$.

   3c. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \alpha A + \beta I \in F$, montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M^2 = xM - \beta^2 I$$

   3d. En déduire, pour $\beta \neq 0$, que la matrice $M = \alpha A + \beta I$ est inversible et que son inverse, qu'on donnera, est aussi dans F.

   3e. On pose $B = A + I$, montrer que B est inversible, et déterminer B^{-1} en fonction de A et I.

   3f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simplifiée de $B^n = (A + I)^n$ en fonction de n, A et I. Le résultat reste-t-il vrai pour $n = 0$? $n = -1$?

4. Application.

   Soient a, b et c trois réels. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $w_0 = c$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 3v_n + 6w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n - v_n - 2w_n \end{array}\right.$$

   On pose pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

4a. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ X_{n+1} = BX_n$.

4b. Montrer que B a une unique valeur propre λ que l'on déterminera.

4c. On pose $A = B - \lambda I$. Calculer A^2.

4d. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = \begin{pmatrix} n+1 & n & 3n \\ 2n & 2n+1 & 6n \\ -n & -n & -3n+1 \end{pmatrix}$.

4e. En déduire l'expression des termes généraux u_n, v_n et w_n en fonction de n et a, b, c.

4f. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que les trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) soient constantes.

4g. Que peut-on dire, lorsque cette condition est vérifiée, du vecteur X_0 par rapport à la matrice B ?

Correction ▼ [re05]

Exercice 20

Soient dans l'espace, quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 de coordonnées respectives $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ et (x_4, y_4, z_4), et soient u, v, w, h quatre nombres réels. On leur associe les matrices :

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ h \end{bmatrix}$$

On considère V comme un vecteur de $\mathbb{R}^4$; on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant pour matrice L dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On note V_1, V_2, V_3 et V_4 les vecteurs ligne de L.

On rappelle (cf cours de Sup) que M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires si et seulement si par exemple :

$$\text{Det }(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4}) = 0$$

1. (a) En examinant le produit LV, montrer qu'il n'y a pas dans $\operatorname{Ker} f$ de vecteur non nul dont les trois premières composantes sont nulles.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit au vecteur nul si et seulement si le déterminant de L est nul (nb : il s'agit de redémontrer un résultat du cours).
   (c) Montrer que si V est non nul et appartient à $\operatorname{Ker} f$, alors :
   $$ux + vy + wz + h = 0$$
   est l'équation d'un plan contenant M_1, M_2, M_3 et M_4.
   (d) Montrer que M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires si et seulement si le déterminant de L est nul.
2. (a) On suppose que le rang de S est inférieur ou égal à 2.
   Montrer que, quel que soit M_4, le déterminant de L est nul. En déduire que M_1, M_2, M_3 sont alignés.
   (b) Montrer que le rang de S est inférieur ou égal à 2 si et seulement si M_1, M_2, M_3 sont alignés.
3. On suppose que $M_1 \neq M_2$
   (a) Montrer que la famille des deux vecteurs lignes (V_1, V_2) est libre.
   (b) Montrer que M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu)V_2$$
4. On suppose ici que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont alignés et tous distincts.
   (a) Montrer que les deux dernières lignes de la matrice L sont combinaisons linéaires des deux premières.
   (b) Qu'en résulte-t-il pour le rang de L et la dimension de $\operatorname{Ker} f$?
   (c) Montrer que L admet, dans le cas où on s'est placé, 0 comme valeur propre, avec un ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2.

5. **Application :**

On suppose M_1, M_2, M_3 et M_4 non coplanaires. Une droite Δ rencontre en quatre points M_4', M_3', M_2' et M_1', tous distincts, les quatre plans contenant respectivement les points (M_1, M_2, M_3), (M_1, M_2, M_4), (M_1, M_3, M_4) et (M_2, M_3, M_4).

On note M_1'', M_2'', M_3'' et M_4'' les milieux des segments $[M_1M_1']$, $[M_2M_2']$, $[M_3M_3']$ et $[M_4M_4']$. On se propose de démontrer que M_1'', M_2'', M_3'' et M_4'' sont coplanaires.

Pour cela, on utilise encore la matrice L construite à l'aide des coordonnées de (M_1, M_2, M_3, M_4) et aussi les matrices L' et L'' construites de la même façon à l'aide des coordonnées de (M_1', M_2', M_3', M_4') et de $(M_1'', M_2'', M_3'', M_4'')$.

(a) On note V_1', V_2', V_3' et V_4' les vecteurs ligne de L'. En considérant les points M_1', M_2, M_3 et M_4, montrer qu'il existe des réels $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tels que :

$$V_1' = \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3 + \delta_1 V_4 \quad \text{avec} \quad \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 1$$

(b) Montrer qu'il existe une matrice T carrée de taille 4 vérifiant :

$$\begin{cases} \text{Les termes diagonaux sont nuls} \\ \text{Sur chaque ligne, la somme des termes vaut 1} \\ L' = T.L \end{cases}$$

(c) Montrer que le vecteur colonne de composantes $(1,1,1,1)$ est vecteur propre de T et donner la valeur propre associée.

(d) Montrer que L est inversible et que L' et T sont de rang 2.

(e) En utilisant la trace de T, donner la liste des valeurs propres de T.

(f) Montrer que $L'' = (L + L')/2$ et justifier que L'' n'est pas inversible.

(g) Conclure.

Correction ▼ [re06]

Exercice 21

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0,$$

et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n \\ w_{n+1} &= v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0, et de l'entier naturel n.
2. (a) Démontrer que A admet une seule valeur propre.
   (b) Déterminer le sous-espace propre de A associé à l'unique valeur propre.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est à dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer une base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   et que les vecteurs e_1', e_2', e_3' aient respectivement pour troisième composante $1, -1$ et 2.
   On notera dorénavant $\mathcal{B}'$ la base (e_1', e_2', e_3').

(b) À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante de T :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.

4. Soit P la matrice de passage de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (a) Exprimer A en fonction de T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
   (b) Calculer P^{-1}.
   (c) Déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de l'entier naturel n.

Correction ▼ [re07]

Exercice 22

Dans ce problème, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. La matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est notée I_2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. On note enfin $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Première partie

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
3. Construire une base (e'_1, e'_2) de $\mathbb{R}^2$ avec $e'_1 \in \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $e'_2 \in \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$.
4. Écrire la matrice D de f dans la base (e'_1, e'_2).
5. En déduire qu'il existe une matrice P, inversible d'ordre 2, telle que $A = PDP^{-1}$; expliciter P et P^{-1}.
6. Pour tout entier naturel non nul n, calculer la matrice D^n puis en déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n et tout réel t, on note $E_n(t)$ la matrice définie par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$$

avec la convention $A^0 = I_2$.

Cette matrice sera écrite sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

1. Expliciter les coefficients $a_n(t), b_n(t), c_n(t)$ et $d_n(t)$ de la matrice $E_n(t)$.
2. (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle.
   (b) Justifier que les suites $\big(a_n(t)\big)_{t\in\mathbb{N}}, \big(b_n(t)\big)_{t\in\mathbb{N}}, \big(c_n(t)\big)_{t\in\mathbb{N}}$ et $\big(d_n(t)\big)_{t\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et expliciter leurs limites respectives notées $a(t), b(t), c(t)$ et $d(t)$.
   Dans la suite, on note $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R, éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que :

$$E(t) = \mathrm{e}^{2t}\, Q + \mathrm{e}^{3t}\, R.$$

4. (a) Que vaut la matrice $Q + R$? Et la matrice $2Q + 3R$?
   (b) Montrer que, pour tout réel t, $E(t)$ est une combinaison linéaire des matrices A et I_2.
5. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ.
6. Montrer que, pour tout couple (s,t) de réels, $E(s)E(t) = E(s+t) = E(t)E(s)$. En déduire que $E(t)$ est inversible et donner son inverse.

7. Montrer que l'application $t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est injective.

Troisième partie

On considère le système (S) d'équations différentielles :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x+y \\ y' & = & -2x+4y \end{array} \right.$$

On appelle solution du système (S) tout couple (u,v) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel t, on ait

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & u(t)+v(t) \\ v'(t) & = & -2u(t)+4v(t) \end{array} \right.$$

1. Soit (u,v) une solution de (S) ; pour tout réel t, on pose
$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$
   (a) Exprimer les réels $u_1(t)$ et $v_1(t)$ à l'aide de $u(t), v(t)$ et des coefficients de la matrice $E(-t)$.
   (b) En déduire que les fonctions u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.
2. Montrer alors que (u,v) est une solution de (S) si et seulement s'il existe un couple (α,β) de réels tels que, pour tout réel t, on ait $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [re08]

Corrigés des sujets :

Correction de l'exercice 1 ▲

Dans l'ensemble de l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

1. Soit $(a,c) \in \mathbb{R}^2$, on considère la matrice A à coefficients réels définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a+c & 0 & c \\ 0 & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+c \end{pmatrix}$$

(a) On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-a-c & 0 & -c \\ 0 & x-a-2c & 0 \\ -c & 0 & x-a-c \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-a-2c & 0 & -c \\ x-a-2c & x-a-2c & 0 \\ x-a-2c & 0 & x-a-c \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-a-2c & 0 & -c \\ 0 & x-a-2c & c \\ 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $\chi_A(x) = (x-a-2c)^2(x-a)$ et

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{a, a+2c\}}$$

(b) Si $c = 0$, la matrice A est égale à aI_3, donc diagonale (et évidemment diagonalisable).
Si $c \neq 0$, on remarque l'existence d'une valeur propre double dont nous allons déterminer le sous-espace caractéristique :

$$\begin{aligned}
(A-(a+2c)I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff -cx + cz = 0 \\
&\iff x = z \quad \text{car } c \neq 0.
\end{aligned}$$

D'où $E_{a+2c} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Résumons : χ_A est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre correspond à la dimension du sous-espace propre associé :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

(c) On considère toujours ici $c \neq 0$ (le cas $c = 0$ est trivial). Il reste à déterminer E_a.

$$\begin{aligned}
(A-aI)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} cx+cz &=& 0 \\ 2cy &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& 0 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

D'où $E_a = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. On conclut :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+2c & 0 \\ 0 & 0 & a+2c \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \text{avec : } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(d) Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On veut résoudre l'équation matricielle :

$$AN = NA \quad (E_1)$$

d'inconnue N.

$$N \text{ solution de } (E_1) \iff AN = NA \iff PDP^{-1}N = NPDP^{-1}$$

On multiplie l'égalité à gauche par P^{-1} et à droite par P :

$$\begin{aligned} N \text{ solution de } (E_1) &\iff P^{-1}\big(PDP^{-1}N\big)P = P^{-1}\big(NPDP^{-1}\big)P \\ &\iff DP^{-1}NP = P^{-1}NPD \end{aligned}$$

En résumé :

$$\boxed{N \text{ est solution de } (E_1) \iff DN' = N'D \quad (E_2), \quad \text{avec } N' = P^{-1}NP}$$

(e) On suppose dans cette question et dans la suivante que $c \neq 0$.

Soit $N' = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On calcule simplement :

$$N'D = \begin{pmatrix} ax_1 & (a+2\,c)\,y_1 & (a+2\,c)\,z_1 \\ ax_2 & (a+2\,c)\,y_2 & (a+2\,c)\,z_2 \\ ax_3 & (a+2\,c)\,y_3 & (a+2\,c)\,z_3 \end{pmatrix} \; ; \; DN' = \begin{pmatrix} ax_1 & ay_1 & az_1 \\ (a+2\,c)\,x_2 & (a+2\,c)\,y_2 & (a+2\,c)\,z_2 \\ (a+2\,c)\,x_3 & (a+2\,c)\,y_3 & (a+2\,c)\,z_3 \end{pmatrix}$$

et on constate que N' est solution de (E_2) si et seulement si :

$$\begin{cases} ay_1 &= (a+2c)y_1 \\ az_1 &= (a+2c)z_1 \\ ax_2 &= (a+2c)x_2 \\ ax_3 &= (a+2c)x_3 \end{cases} \quad \text{i.e} \quad \begin{cases} 2cy_1 &= 0 \\ 2cz_1 &= 0 \\ 2cx_2 &= 0 \\ 2cx_3 &= 0 \end{cases}$$

Comme $c \neq 0$, on en déduit que N' est solution de (E_2) si et seulement si

$$y_1 = z_1 = x_2 = x_3 = 0$$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de (E_2) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_2)} = \left\{ N' = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & z_2 \\ 0 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x_1, y_2, z_2, y_3, z_3 \in \mathbb{R} \right\}}$$

(f) L'ensemble des solutions de (E_1) s'en déduit immédiatement (avec $N = PN'P^{-1}$) :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_1)} = \left\{ N = P \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & z_2 \\ 0 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } x_1, y_2, z_2, y_3, z_3 \in \mathbb{R} \right\}}$$

2. Soit l'ensemble $F = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+b+c \end{pmatrix} \; ; \; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

(a) Notons :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate immédiatement que F est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices I, J et K, c'est à dire le sous-espace vectoriel engendré par I, J et K :

$$\boxed{F = \text{Vect}(I, J, K) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

(b) (I, J, K) est une famille génératrice de F, et de plus :

$$aI + bJ + cK = 0 \implies \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & 0 \\ c & 0 & a+b+c \end{pmatrix} = 0 \implies b = c = 0 = a$$

donc cette famille est libre.

$$\boxed{(I,J,K) \text{ est une base de } F, \text{ et } \dim F = 3.}$$

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on va désormais étudier certaines propriétés de $M(a,b,c)$, élément quelconque de F.

(c) $M(a,b,c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+2c\\a+b+2c\\a+b+2c\end{pmatrix} = (a+b+2c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } M(a,b,c), \text{ associé à la valeur propre } \lambda_1 = a+b+2c.}$$

(d) Calculons le polynôme caractéristique de $M(a,b,c)$:

$$\begin{array}{rcll}
\chi_{M(a,b,c)}(x) & = & \begin{vmatrix} x-a-c & -b & -c \\ -b & x-a-2c & 0 \\ -c & 0 & x-a-b-c \end{vmatrix} & \\
& = & \begin{vmatrix} x-a-b-2c & -b & -c \\ x-a-b-2c & x-a-2c & 0 \\ x-a-b-2c & 0 & x-a-b-c \end{vmatrix} & (C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3) \\
\chi_{M(a,b,c)}(x) & = & \begin{vmatrix} x-a-b-2c & -b & -c \\ 0 & x-a+b-2c & c \\ 0 & b & x-a-b \end{vmatrix} & \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Il reste à développer :

$$\begin{array}{rcl}
\chi_{M(a,b,c)}(x) & = & \big(x-(a+b+2c)\big)\big((x-a+b-2c)(x-a-b)-bc\big) \\
& = & \big(x-(a+b+2c)\big)\big(x^2-2(a+c)x+a^2-b^2+2ac+bc\big)
\end{array}$$

Pour achever la factorisation, il suffit de calculer le discriminant du second facteur :

$$\begin{array}{rcl}
\Delta & = & 4(a+c)^2-4(a^2-b^2+2ac+bc) = 4(b^2+c^2-bc) \\
& = & 4\left[\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right]
\end{array}$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
\chi_{M(a,b,c)} & = & (x-(a+b+2c))\left(x-\left(a+c-\sqrt{\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2}\right)\right)\times\cdots \\
& & \cdots\times\left(x-\left(a+c+\sqrt{\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2}\right)\right)
\end{array}}$$

(e) La matrice $M(a,b,c)$ admet une valeur propre triple si et seulement si les trois racines du polynôme caractéristique sont égales, ce qui revient à la condition :

$$b+c = \sqrt{\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2} = -\sqrt{\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2}$$

Ceci équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{l} b+c=0 \\ \left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2=0 \end{array}\right. \quad \text{i.e} \quad \left\{\begin{array}{l} c=-b \\ \left(b+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=3b^2=0 \end{array}\right.$$

En définitive :

$$\boxed{M(a,b,c) \text{ admet une valeur propre triple si et seulement si } b=c=0.}$$

Dans ce cas, la matrice $M(a,b,c)$ est diagonale (donc diagonalisable) car $M(a,0,0)=aI$.

(f) $M(a,b,c)$ admet une valeur propre double non triple si on a $(b,c)\neq(0,0)$ et si l'une des trois conditions est vérifiée :

$$\left\{\begin{array}{l}
b+c=\sqrt{\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2} \\
b+c=-\sqrt{\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2} \\
\sqrt{\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2}=-\sqrt{\left(b-\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2}
\end{array}\right.$$

Les deux premières conditions impliquent la relation :

$$(b+c)^2 = \left(b - \frac{1}{2}c\right)^2 + \frac{3}{4}c^2, \text{ c'est à dire : } bc = 0, \text{ ou encore : } b = 0 \text{ ou } c = 0$$

La troisième condition équivaut à :

$$\left(b - \frac{1}{2}c\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 = 0, \text{ c'est à dire : } c = 0 = b$$

On a donc nécessairement ($b = 0$ et $c \neq 0$) ou ($c = 0$ et $b \neq 0$).
Réciproquement, avec la première condition, on a :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{a + 2c, a + c - |c|, a + c + |c|) = \{a, a + 2c\}$$

Et avec la deuxième condition, on a :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{a + b, a - |b|, a + |b|) = \{a + b, a - b\}$$

Et on constate qu'il y a bien une racine double non triple (dans le premier cas, on retrouve la matrice de la question 1 avec $c \neq 0$).

$$\boxed{M(a,b,c) \text{ admet une valeur propre double non triple si et seulement si } \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ c \neq 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} c = 0 \\ b \neq 0 \end{array}\right. .}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Partie I. Décomposition de Dunford : généralités

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n et 0_n respectivement la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, s'il existe $\Delta, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

i) $A = \Delta + N$,
ii) Δ est diagonalisable,
iii) N est nilpotente (i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$).
iv) $\Delta N = N\Delta$, autrement dit les matrices Δ et N commutent,

Alors on dira que le couple (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A.

1. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1a. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a clairement $A_1 = \Delta + N$. $\Delta = 3I$ est diagonale donc diagonalisable et N nilpotente car $N^2 = 0$. Enfin :

$$\Delta N = 3N = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N\Delta$$

Les quatre points de la définition sont vérifiés :

$$\boxed{(\Delta, N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A_1.}$$

1b. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les matrices Δ et N ne commutent pas :

$$\boxed{(\Delta, N) \text{ n'est pas une décomposition de Dunford de } A_2.}$$

2. Soit A_3 une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est immédiat que :

$$\boxed{(A_3, 0) \text{ est une décomposition de Dunford de } A_3.}$$

3. Soit A_4 une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est immédiat que :

$$\boxed{(0, A_4) \text{ est une décomposition de Dunford de } A_3.}$$

4. On suppose que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A. Alors en particulier :

$$A = \Delta + N \quad \text{et} \quad \Delta N = N\Delta$$

D'où :

$$\Delta A = \Delta(\Delta + N) = \Delta^2 + \Delta N = \Delta^2 + N\Delta = (\Delta + N)\Delta = A\Delta$$

et de même :

$$NA = N(\Delta + N) = N\Delta + N^2 = \Delta N + N^2 = (\Delta + N)N = AN$$

$$\boxed{\Delta \text{ et } N \text{ commutent avec } A.}$$

Remarque : il est même possible de montrer que Δ et N sont des polynômes en A.

Partie II. Décomposition dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Avec ces notations :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

On constate immédiatement que :

$$\boxed{\chi_A = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A}$$

2. On suppose que $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A > 0$. Alors A admet deux valeurs propres réelles distinctes, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question I.2 :

$$\boxed{(A, 0) \text{ est une décomposition de Dunford de } A.}$$

3. On suppose que $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A = 0$. Alors P_A est scindé et A admet une seule valeur propre réelle $\lambda = \frac{\operatorname{tr} A}{2}$. A est trigonalisable, autrement dit, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1} = P(\lambda I + N)P^{-1} = \underbrace{\lambda I}_{\text{diagonalisable}} + \underbrace{PNP^{-1}}_{\text{nilpotente}}$$

avec $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(P^{-1}NP)^2 = P^{-1}NPP^{-1}NP = P^{-1}N^2P = 0$. En résumé, la matrice λI est diagonalisable, la matrice PNP^{-1} est nilpotente et les deux commutent :

$$\boxed{\text{La décomposition de Dunford de } A \text{ est } \left(\tfrac{\operatorname{tr} A}{2} \cdot I, A - \tfrac{\operatorname{tr} A}{2} \cdot I\right).}$$

4. On suppose que $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A < 0$. On va montrer par l'absurde que A n'admet pas de décomposition de Dunford. On suppose que :

$$A = \Delta + N$$

où Δ est diagonalisable, N nilpotente, et $\Delta N = N\Delta$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.

4a. On suppose que λ est une valeur propre de N et X un vecteur propre associé, Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \ N^kX = \lambda^kX$:

- $\star$ C'est vrai pour $n = 1$ par définition.
- $\star$ Supposons que pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé on a $N^kX = \lambda^kX$. Alors :

$$N^{k+1}X = N^k \times NX = N^k \times \lambda X = \lambda N^kX = \lambda \times \lambda^kX = \lambda^{k+1}X$$

Le résultat est vrai au rang $n + 1$.

Par récurrence, on vient de montrer que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ \ N^kX = \lambda^kX}$$

4b. Si λ est une valeur propre de N, il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, tel que

$$N^p X = \lambda^p X = 0 \quad \text{car} \quad N^p = 0$$

On a donc $\lambda^p = 0$, et il s'ensuit que $\lambda = 0$.

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre possible de } N.}$$

4c. Le polynôme caractéristique de N est scindé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ce qui est suffisant pour conclure que N est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. 0 étant la seule valeur propre, la diagonale de la matrice triangulaire est nulle :

$$\boxed{\text{Il existe } P \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que : } P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Alors

$$N^2 = P\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 P^{-1}$$

avec $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$, d'où :

$$\boxed{N^2 = 0}$$

4d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de Δ. On note $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors :

$$A(NX) = (\Delta + N)NX = \Delta NX + \underbrace{N^2X}_{=0} = N(\Delta X) = N \times \lambda X$$

$$\boxed{A(NX) = \lambda(NX)}$$

Si $NX \neq 0$, on vient de montrer que λ est valeur propre de A associée au vecteur propre NX. Sinon $NX = 0$, et dans ce cas :

$$AX = (\Delta + N)X = \Delta X + \underbrace{NX}_{=0} = \lambda X$$

donc λ est valeur propre de A associée au vecteur propre X. Dans tous les cas :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } A.}$$

Or on a supposé que $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A \neq 0$, autrement dit A n'a pas de valeur propre réelle. Le résultat de la question précédente est en contradiction avec le présupposé. On en conclut que

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de décomposition de Dunford de } A.}$$

Partie III. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on pose $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Étude de Δ

1a. Calculons le polynôme caractéristique de Δ :

$$\chi_\Delta(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 1 & x-3 & -1 \\ 1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2)(x^2-6x+8) = (x-2)^2(x-4)$$

$$\boxed{\operatorname{Spec}(\Delta) = \{2, 4\}}$$

0 n'est pas valeur propre de Δ, donc $\operatorname{Ker}(\Delta) = \{0\}$ et on en déduit que

$$\boxed{\Delta \text{ est inversible.}}$$

1b. Cherchons les sous-espaces propres associés aux valeurs propres :

⋆ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$ si et seulement si $(\Delta - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résout donc :

$$\begin{cases} 0 & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y + z$$

On en déduit que $E_2 = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Comme $\dim E_2 = 2$, on peut déjà affirmer que

$$\boxed{\Delta \text{ est diagonalisable.}}$$

$\star$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4$ si et seulement si $(\Delta - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résout donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x & = & 0 \\ -x-y+z & = & 0 \\ -x+y-z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & z \end{array} \right.$$

On en déduit que $E_4 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. En conclusion :

$$\boxed{P^{-1}\Delta P = D, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ inversible et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.}$$

1c. Puisque Δ est inversible, cette dernière relation s'écrit également

$$\Delta = PDP^{-1} \quad \text{d'où} \quad \Delta^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = PD^{-1}P^{-1} \quad \text{avec} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Cette relation prouve que

$$\boxed{\Delta^{-1} \text{ est diagonalisable et } \Delta^{-1} = P\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}P^{-1} = PD_1P^{-1}.}$$

2. Décomposition de A.

2a. Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ x-2 & x-2 & -2 \\ 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2) \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ 0 & x-3 & -1 \\ 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ &= (x-2)(x^2-6x+8) = (x-2)^2(x-4) \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Spec}(A) = \{2, 4\}$. De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$ si et seulement si $(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résout donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ 2z & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x & = & y \end{array} \right.$$

On en déduit que $E_2 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. La dimension de E_2 est strictement inférieure à la multiplicité de la valeur propre 2. En conclusion :

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

2b. Un simple calcul nous montre que $N^2 = 0$, ce qui signifie que :

$$\boxed{N \text{ est nilpotente.}}$$

2c. Par un calcul simple on obtient $N\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta N$. On constate que :

$$\boxed{N\Delta = \Delta N = 2N}$$

2d. Remarquons que $A = \Delta + N$. Ensuite, d'après les questions 1b,2b et 2c, il est vérifié que :

$$\boxed{(\Delta, N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A.}$$

3. Décomposition de Dunford de A^{-1}.

On pose $N_1 = \Delta^{-1}N$.

3a. D'après III.2c, on sait que $\Delta N = N\Delta$, si on multiplie à gauche et à droite par Δ^{-1}, on obtient une nouvelle égalité :

$$\Delta^{-1}(\Delta N)\Delta^{-1} = \Delta^{-1}(N\Delta)\Delta^{-1}$$

et après simplification ($\Delta^{-1}\Delta = \Delta\Delta^{-1} = I_3$) :

$$\boxed{N\Delta^{-1} = \Delta^{-1}N}.$$

3b. Il vient ensuite : $N_1^2 = \Delta^{-1}N \times \Delta^{-1}N = \Delta^{-1}N \times N\Delta^{-1} = \Delta^{-1}N^2\Delta^{-1} = 0$ car $N^2 = 0$.

$$\boxed{N_1 \text{ est nilpotente.}}$$

3c. $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1) = I_3 - N_1 + N_1 - N_1^2$. Or $N_1^2 = 0$ donc :

$$\boxed{(I_3 + N_1)(I_3 - N_1) = I_3}$$

Par commutativité, on a aussi $(I_3 - N_1)(I_3 + N_1) = I_3$. Ce calcul prouve que :

$$\boxed{I_3 + N_1 \text{ est inversible et } (I_3 + N_1)^{-1} = I_3 - N_1.}$$

3d. 0 n'est pas valeur propre de A, donc :

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} \text{ existe.}}$$

3e. Par une simple mise en facteur : $A = \Delta + N = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N) = \Delta(I_3 + N_1)$, ce qui s'écrit par passage à l'inverse :

$$A^{-1} = \left[\Delta(I_3 + N_1)\right]^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}$$

$$\boxed{A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}}$$

D'après la question 3c, cette écriture devient :

$$A^{-1} = (I_3 - N_1)\Delta^{-1} = \Delta^{-1} - N_1\Delta^{-1} = \Delta^{-1} + \Delta^{-1}N\Delta^{-1} = \Delta^{-1} + (\Delta^{-1})^2N$$

En outre, les conditions suivantes sont respectées :

- ⋆ Δ^{-1} est diagonalisable d'après 1c.
- ⋆ $(\Delta^{-1})^2N$ est nilpotente car, par commutativité de N et Δ^{-1} :

$$\left[(\Delta^{-1})^2N\right]^2 = (\Delta^{-1})^4N^2 = 0 \quad \text{car } N^2 = 0$$

- ⋆ Δ^{-1} et $(\Delta^{-1})^2N$ commutent car Δ^{-1} et N commutent.

On peut donc affirmer que :

$$\boxed{\left(\Delta^{-1}, (\Delta^{-1})^2N\right) \text{ est une décomposition de Dunford de } A^{-1}.}$$

4. Décomposition de Dunford des puissances de A.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

4a. Si $p = 0$ ou $p = 1$, la formule est évidente. Soit $p \geqslant 2$. Les matrices Δ et N commutent d'après 2c, la formule du binôme de Newton est donc applicable :

$$\begin{aligned} A^p &= (\Delta + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \Delta^{p-k}N^k = \binom{p}{0}\Delta^pN^0 + \binom{p}{1}\Delta^{p-1}N \quad \text{avec} \quad N^k = 0,\ \forall k \geqslant 2 \\ &= \Delta^p + p\Delta^{p-1}N \end{aligned}$$

Ajoutons que, toujours d'après la question 2c, on a $\Delta N = 2N$. Par une récurrence immédiate, il s'ensuit que $\Delta^{p-1}N = 2^{p-1}N$. On peut achever le calcul :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N.}$$

4b. Il reste trois points à vérifier pour montrer que $(\Delta^p, p2^{p-1}N)$ est une décomposition de Dunford de A^p :

- ⋆ Δ^p est diagonalisable.

  En effet, on peut montrer par récurrence que pour tout entier k, $\Delta^k = PD^kP^{-1}$. C'est vrai pour $k = 1$ et si on suppose le résultat vrai au rang k, alors

$$\Delta^{k+1} = \Delta\Delta^k = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}D^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$$

  En particulier $\Delta^p = PD^pP^{-1}$ avec $D^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 4^p \end{pmatrix} = 2^p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$.

- ⋆ $p2^{p-1}N$ est nilpotente car N est nilpotente.
- ⋆ Δ^p et $p2^{p-1}N$ commutent car Δ et N commutent (c.f. 2c).

On a bien vérifié que

$$\boxed{(\Delta^p, p2^{p-1}N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A^p.}$$

4c. On calcule $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Rappelons que

$$\begin{aligned} \Delta^p &= PD^pP^{-1} = \frac{2^p}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{p-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2^p \\ 0 & 1 & 2^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta^p = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1-2^p & 1+2^p & -1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}}$$

En outre $p2^{p-1}N = 2^{p-1}\begin{pmatrix} p & -p & p \\ p & -p & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et par sommation :

$$\boxed{A^p = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 2+p & -p & p \\ 1+p-2^p & 1-p+2^p & p-1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}}$$

5. Décomposition de Dunford de R vérifiant $R^2 = A$, R s'appelle une racine carrée de A.

5a. Soit $U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, tel que $U^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = D$. Alors par identification :

$$\alpha^2 = \beta^2 = 2 \quad \text{et} \quad \gamma^2 = 4 \quad \text{d'où :} \quad \alpha = \pm\sqrt{2},\ \beta = \pm\sqrt{2} \text{ et } \gamma = \pm 2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Les matrices } U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ diagonales vérifiant } U^2 = D \text{ sont les matrices de la forme :} \\ U = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \end{array}}$$

5b. On choisit $U = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\Delta = PDP^{-1} = PU^2P^{-1} = PUP^{-1} \times PUP^{-1}$$

On pose $S = PUP^{-1}$. La matrice S et la matrice U sont semblables, on conclut que :

$\boxed{S \text{ est une matrice (diagonalisable) à } \textbf{valeurs propres positives} \text{ telle que } S^2 = \Delta.}$

5c. Cherchons deux réels a et b tels que $S = a\Delta + bI_3$. Ceci équivaut à :

$$PUP^{-1} = aPDP^{-1} + bPP^{-1} = P(aD + bI_3)P^{-1}$$

En mutipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, cette égalité revient à $U = aD + bI_3$ soit :

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2a + b \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$

On trouve $a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $b = 2\sqrt{2} - 2$. D'où :

$$\boxed{S = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\Delta + (\sqrt{2}-2)I_3}$$

On en déduit que :

$$SN_1 = (a\Delta + bI_3)N_1 = a\Delta N_1 + bN_1 = a\Delta\Delta^{-1}N + bN_1 = aN + bN_1$$

et de même :

$$N_1S = N_1(a\Delta + bI_3) = aN_1\Delta + bN_1 = a\Delta^{-1}N\Delta + bN_1 = a\Delta^{-1}\Delta N + bN_1 = aN + bN_1$$

On obtient le même résultat pour les deux calculs :

$$\boxed{\text{Les matrices } S \text{ et } N_1 \text{ commutent.}}$$

5d. On pose $M = I_3 + \frac{1}{2}N_1$. Calculons :

$$M^2 = (I_3 + \frac{1}{2}N_1)^2 = I_3 + N_1 + \frac{1}{4}N_1^2$$

D'après 3b, on a $N_1^2 = 0$, d'où :

$$\boxed{M^2 = I_3 + N_1}$$

5e. On écrit

$$A = \Delta\big(I_3 + \Delta^{-1}N\big) = \Delta(I_3 + N_1) = S^2M^2$$

Comme S et N_1 commutent, alors :

$$MS = (I_3 + \frac{1}{2}N_1)(a\Delta + bI_3) = (a\Delta + bI_3)(I_3 + \frac{1}{2}N_1) = SM$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{A = (SM)^2 = R^2 \text{ avec } R = SM.}$$

5f. Reprenons l'expression de R :

$$R = (I_3 + \frac{1}{2}N_1)(a\Delta + bI_3) = a\Delta + bI_3 + \frac{1}{2}aN_1\Delta + \frac{b}{2}N_1$$

avec $N_1\Delta = \Delta^{-1}N\Delta = N\Delta^{-1}\Delta = N$, on peut écrire :

$$R = \big[a\Delta + bI_3\big] + \big[\frac{1}{2}aN + \frac{b}{2}N_1\big]$$

⋆ La matrice $a\Delta + bI_3$ est diagonalisable. En effet :

$$a\Delta + bI_3 = aPDP^{-1} + bPP^{-1} = P \underbrace{(aD + bI_3)}_{\text{matrice diagonale}} P^{-1}$$

⋆ La matrice $\dfrac{1}{2}aN + \dfrac{b}{2}N_1$ est nilpotente. En effet :

$$\left(\frac{1}{2}aN + \frac{b}{2}N_1\right)^2 = \frac{1}{4}a^2N^2 + \frac{1}{4}abNN_1 + \frac{1}{4}abN_1N + \frac{b^2}{4}N_1^2 = 0$$

car $N^2 = N_1^2 = 0$ et $NN_1 = N\Delta^{-1}N = N^2\Delta^{-1} = 0 = N_1N.$

⋆ Les matrices $a\Delta + bI_3$ et $\frac{1}{2}aN + \frac{b}{2}N_1$ commutent car les matrices N, Δ et Δ^{-1} commutent.

$$\boxed{\left(a\Delta + bI_3, \frac{1}{2}aN + \frac{b}{2}N_1\right) \text{ est une décomposition de Dunford de } R.}$$

[red]

Correction de l'exercice 3 ▲

Partie I.

1. On résout le système d'inconnues matricielles U et V :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda U + \mu V & = & A \\ \lambda^2 U + \mu^2 V & = & A^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} (\lambda^2 - \lambda\mu)U = A^2 - \mu A & (L_2 - \mu L_1) \\ (\mu^2 - \lambda\mu)V = A^2 - \lambda A & (L_2 - \lambda L_1) \end{array}\right.$$

$$\boxed{U = \frac{A^2 - \mu A}{\lambda(\lambda - \mu)} \quad \text{et :} \quad V = -\frac{A^2 - \lambda A}{\mu(\lambda - \mu)}}$$

Grâce à ces expressions, on peut donner l'expression de A^3 en fonction de A et A^2 :

$$\begin{array}{rcl} A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V & = & \dfrac{\lambda^2(A^2 - \mu A)}{\lambda - \mu} - \dfrac{\mu^2(A^2 - \lambda A)}{\lambda - \mu} \\ & = & \dfrac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu}A^2 - \dfrac{\lambda\mu(\lambda - \mu)}{\lambda - \mu}A \end{array}$$

$$\boxed{A^3 = (\lambda + \mu)A^2 - \lambda\mu A.}$$

Remarquons que si $p \geqslant 1$, on obtient en multipliant l'égalité par A^{p-1} :

$$\boxed{A^{p+2} = (\lambda + \mu)A^{p+1} - \lambda\mu A^p} \quad (\mathbf{1})$$

2. Montrons par récurrence (à deux pas) que, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V.$$

⋆ Par définition, c'est vrai pour $p = 1, 2$ et 3.

⋆ Soit $p \geqslant 1$. On suppose le résultat vrai aux rangs p et $p+1$. D'après la remarque de la question précédente, puis l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} A^{p+2} & = & (\lambda + \mu)A^{p+1} - \lambda\mu A^p \\ & = & (\lambda + \mu)(\lambda^{p+1}U + \mu^{p+1}V) - \lambda\mu(\lambda^p U + \mu^p V) \\ & = & \lambda^{p+2}U + \mu^{p+2}V \end{array}$$

Le résultat est donc vrai au rang $p + 2$.

Par récurrence, on a :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p = \lambda^p U + \mu^p V.}$$

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. On note $f^p = f \circ \cdots \circ f$ la p$^{\text{ième}}$ composée de f. Soit $p \geqslant 2$.

(a) Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, alors :

$$f^p(x) = f^{p-1}\big(f(x)\big) = f^{p-1}(0) = 0$$

Donc $x \in \operatorname{Ker} f^p$, et on a montré l'inclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^p}$$

(b) La relation (1) est l'écriture matricielle (à un décalage d'indice près) dans la base canonique de :

$$f^{p+1} = (\lambda + \mu)f^p - \lambda\mu f^{p-1} \quad \text{i.e.} \quad \lambda\mu f^{p-1} = (\lambda + \mu)f^p - f^{p+1}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda + \mu)f^p(x) - f^{p+1}(x).}$$

(c) On suppose $x \in \operatorname{Ker} f^p$, alors $f^p(x) = f^{p+1}(x) = 0$ et :

$$f^{p-1}(x) = \frac{1}{\lambda\mu}\Big[(\lambda+\mu)f^p(x) - f^{p+1}(x)\Big] = 0$$

Donc pour $p \geqslant 2$, on a $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p-1}$. De proche en proche, on a de même :

$$\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p-1} \subset \operatorname{Ker} f^{p-2} \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} f$$

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f}$$

(d) D'après les questions 3a et 3c, on a pour $p \geqslant 2$: $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f$. D'après le théorème du rang, il vient alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^p$. Ceci donne, par équivalence matricielle :

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^p)}$$

Partie II.

On donne toujours un entier $n \geqslant 1$ fixé.

Soient U et V des matrices colonnes *non nulles.* On note : $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = aI_n + UV^T.$$

1. Par définition du produit matriciel V^TU est une matrice à une ligne et une colonne, qu'on peut assimiler à un réel. Plus précisément :

$$\boxed{V^TU = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i}$$

2. En revanche, UV^T est une matrice de taille n :

$$UV^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nv_1 & \cdots & u_nv_n \end{pmatrix}$$

Et d'autre part, en utilisant le résultat de la question précédente avec $k = V^TU \in \mathbb{R}$ et l'associativité du produit matriciel :

$$(UV^T)^2 = U(V^TU)V^T = U \times k \times V^T = kUV^T$$

$$\boxed{\text{Il existe un réel } k \text{ tel que } (UV^T)^2 = k(UV^T).}$$

En utilisant, cette expression, on trouve :

$$\begin{aligned} A^2 &= (aI_n + UV^T)^2 = a^2I_n + 2aUV^T + (UV^T)^2 = a^2I_n + (2a+k)UV^T \\ &= a^2I_n + (2a+k)(A - aI_n) \\ &= (2a+k)A - a(a+k)I_n \end{aligned}$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{Il existe deux réels } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } A^2 = \alpha A + \beta I_n.}$$

Plus précisément, on a :

$$\boxed{\alpha = 2a + k \quad \text{et} \quad \beta = -a(a+k)}$$

3. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Par définition de A, et en utilisant les calculs effectués auparavant :

$$A = aI_n + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nv_1 & \cdots & a + u_nv_n \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = a\delta_{i,j} + u_i v_j}$$

avec $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Il vient immédiatement $\mathrm{Tr}(A) = na + \sum_{i=1}^{n} u_i v_j$. C'est à dire :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = na + V^T U}$$

4. On remarque que $k = V^T U = \mathrm{Tr}(A) - na$. D'autre part, d'après les calculs faits à la question 2, on a $\alpha = 2a + k$ et $\beta = -a(a+k)$, avec $k = \mathrm{Tr}(A) - na$ d'où :

$$\boxed{\begin{cases} \alpha &= \mathrm{Tr}(A) - (n-2)a \\ \beta &= -a(\mathrm{Tr}(A) - (n-1)a) \end{cases}}$$

5. Soit λ une valeur propre de A. Alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$, et on a :

$$A^2 X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda^2 X$$

Donc λ^2 est une valeur propre de A^2. En outre, on sait que $A^2 - \alpha A - \beta I_n = 0$, donc :

$$0 = A^2 X - \alpha AX - \beta X = \lambda^2 X - \alpha\lambda X - \beta X = (\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta)X$$

Et comme $X \neq 0$, λ vérifie l'équation :

$$\boxed{\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0.}$$

6. On sait que les valeurs propres éventuelles λ_1 et λ_2 sont les solutions de l'équation du second degré ci-dessus. Du fait des relations entre coefficients et racines, il s'agit aussi des solutions du système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \alpha &= \mathrm{Tr}(A) - (n-2)a \\ \lambda_1\lambda_2 = -\beta &= a(\mathrm{Tr}(A) - (n-1)a) \end{cases}$$

On remarque alors que les deux solutions proposées vérifient ce système.

On peut aussi résoudre directement le système en calculant son discriminant :

$$\delta = \alpha^2 - 4\beta = (2a+k)^2 + 4a(a+k) = k^2$$

Donc $\lambda_1 = \dfrac{\alpha - k}{2} = a$ et $\lambda_2 = \dfrac{\alpha + k}{2} = a + k = \mathrm{Tr}(A) - (n-1)a$.

Autre méthode : Remarquons que $A - aI_n = UV^T$ est de rang 1 car toutes les colonnes sont liées à la même colonne $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. Ainsi, par le théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Ker}(A - aI_n) = n - 1$$

Ceci prouve que a est valeur propre de A d'ordre au moins $n-1$. Il ne reste qu'une valeur propre λ à trouver, qui est nécessairement réelle car on sait que dans $\mathbb{C}$, la trace d'une matrice égale la somme de ses valeurs propres. Plus précisément :

$$\mathrm{Tr}(A) = (n-1)a + \lambda \quad \text{donc :} \quad \lambda = \mathrm{Tr}(A) - (n-1)a$$

Les seules valeurs propres possibles de A sont :

$$\boxed{\lambda_1 = a \quad \text{et} \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A) - (n-1)a.}$$

7. On suppose que $\mathrm{Tr}(UV^T) \neq 0$ et on considère les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 définis par :

$$E_i = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ AX = \lambda_i X\}.$$

Remarquons que comme $\mathrm{Tr}(UV^T) \neq 0$, on a $\mathrm{Tr}(A) \neq na$, et $\lambda_2 \neq \lambda_1 = a$.

(a) Soit $X \in E_1 \cap E_2$. Alors $AX = \lambda_1 X = \lambda_2 X$. Ainsi :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)X = 0 \quad \text{d'où : } X \neq 0 \text{ car } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

On conclut :

$$\boxed{E_1 \cap E_2 = \{0\}}$$

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne On suppose qu'il existe $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ tels que $X = X_1 + X_2$. Par définition :

$$AX = AX_1 + AX_2 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$$

On a donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + X_2 = X \\ \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = AX \end{array} \right. \quad \text{i.e} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} X_1 & = & \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(AX - \lambda_2 X) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I)X \\ X_2 & = & \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(AX - \lambda_1 X) = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I)X \end{array} \right.$$

On vérifie réciproquement qu'on a $X = X_1 + X_2$, et :

$$\begin{array}{rcl} AX_1 & = & \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A^2X - \lambda_2 AX) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\alpha AX - \beta X - \lambda_2 AX) \\ & = & \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}((\lambda_1 + \lambda_2)AX + \lambda_1\lambda_2 X - \lambda_2 AX) \\ AX_1 & = & \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}(AX - \lambda_2 X) = \lambda_1 X_1 \end{array}$$

En effet d'après la question 5, λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation :

$$x^2 - \alpha x - \beta = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$$

d'où $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha$ et $\beta = -\lambda_1\lambda_2$.
On obtient un résultat semblable lors du calcul de AX_2.

$$\boxed{\text{Pour tout vecteur colonne } X, \text{ il existe } X_1 \in E_1 \text{ et } X_2 \in E_2 \text{ tels que } X = X_1 + X_2.}$$

(c) D'après les questions précédentes, on a $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$, donc :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Valeurs propres de u.

$$\begin{array}{rcl} \chi_A(x) & = & \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \\ & = & (x-2)[(x-2)^2 - 1] \\ & = & (x-2)(x-1)(x-3) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Les valeurs propres de } u \text{ sont :} \\ \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3 \end{array}}$$

On est en dimension 3, et A a trois valeurs propres distinctes. On sait que cela suffit pour que A (ou u) soit diagonalisable.

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

2. Pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$, le système à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Avec $x_2 = 1$, on trouve :

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$$

Pour la valeur propre $\lambda_2 = 2$, le système à résoudre est :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Avec $x_2 = 1$, on trouve :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$$

Pour la valeur propre $\lambda_3 = 3$, le système à résoudre est :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_3 &= 0 \end{cases}$$

Avec $x_2 = 1$, on trouve :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$$

Finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

3. $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ sont linéairement indépendants car ce sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes.
   Comme il s'agit de trois vecteurs en dimension 3 :
   $$\boxed{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$
   Dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, la matrice de u est :
   $$\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$
   Enfin, les formules de changement de base donnent :
   $$\boxed{\Delta = P^{-1}AP, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $B^2 = A$, on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.
   (a) $B^2 = A$ est la traduction matricielle, dans la base canonique, de :
   $$\boxed{v^2 = u}$$
   On a alors :
   $$u \circ v = v^2 \circ v = (v \circ v) \circ v = v \circ (v \circ v) = v \circ v^2 = v \circ u$$
   $$\boxed{u \circ v = v \circ u}$$
   (b) Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. On a :
   $$u \circ v(\overrightarrow{e_i}) = v \circ u(\overrightarrow{e_i}) = v(\lambda_i \overrightarrow{e_i}) = \lambda_i v(\overrightarrow{e_i})$$
   On voit que $v(\overrightarrow{e_i})$ appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i. Comme celui-ci est de dimension 1, engendré par $\overrightarrow{e_i}$, on peut affirmer que $v(\overrightarrow{e_i})$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_i}$. En d'autres termes :
   $$\boxed{\forall i \in \{1, 2, 3\}, \exists \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ tel que } v(\overrightarrow{e_i}) = \alpha_i \overrightarrow{e_i}}$$
   (c) Dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, la matrice de v est, compte-tenu des notations introduites à la question précédente :
   $$\boxed{V = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}}$$
   Si on exprime dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la relation $v^2 = u$, on obtient :
   $$V^2 = \Delta$$
   c'est-à-dire :
   $$\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   On a donc :
   $$\boxed{\alpha_1 = \pm 1,\ \ \alpha_2 = \pm\sqrt{2},\ \ \alpha_3 = \pm\sqrt{3}}$$

5. Cherchons $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que $X^2 = A$. Si on désigne par v l'endomorphisme représenté par X dans la base canonique, on a $v^2 = u$. Et on a vu que la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ diagonalise les deux endomorphismes u et v.
   En d'autres termes, dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, la matrice de u est :
   $$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   et la matrice de v est de la forme :
   $$V = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$
   La relation $v^2 = u$ se traduit par :
   $$V^2 = \Delta$$
   et cela donne :
   $$\alpha_1 = \pm 1, \quad \alpha_2 = \pm\sqrt{2}, \quad \alpha_3 = \pm\sqrt{3}$$
   Mais les formules de changement de base nous permettent d'écrire :
   $$\Delta = P^{-1}AP \text{ et } V = P^{-1}XP$$
   où P est la matrice introduite à la question 3.
   On a donc $X = PVP^{-1}$, et on conclut :

   Les matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui sont solutions de l'équation $X^2 = A$ sont les matrices :
   $$X = PVP^{-1}$$
   où :
   $$V = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
   et :
   $$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (a) Le polynôme caractéristique de B est :
   $$P_B(X) = (2 - X)(3 - X) - 2 = X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4)$$
   On en déduit immédiatement que :
   $$\boxed{\mathrm{Spec}(B) = \{1, 4\}}$$
   Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples d'où :
   $$\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$$
   Enfin les sous-espaces propres sont déterminés par les équations suivantes :
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad (B - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$\Leftrightarrow \quad x + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2y$$
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_4 \quad \Leftrightarrow \quad (B - 4I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$\Leftrightarrow \quad x - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$
   Les sous-espaces propres sont ainsi donnés par :

$$\boxed{E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } E_4 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

(b) Les résultats de la question précédente permettent immédiatement d'écrire :

$$\boxed{B = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \alpha D + \beta I$ avec $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + \beta = 16 \end{cases}$.

On obtient $\beta = 1 - \alpha$ et $4\alpha + 1 - \alpha = 16$ soit $\alpha = 5$ et $\beta = -4$, soit :

$$\boxed{D^2 = 5D - 4I}$$

Il s'ensuit que $B^2 = PD^2P^{-1} = P(5D - 4I)P^{-1} = 5PDP^{-1} - 4PP^{-1}$, soit :

$$\boxed{B^2 = 5B - 4I}$$

(d) En isolant I dans l'égalité qui précède :

$$I = -\frac{1}{4}B^2 + \frac{5}{4}B = B\left(-\frac{1}{4}B + \frac{5}{4}I\right) = \left(-\frac{1}{4}B + \frac{5}{4}I\right)B$$

et par définition de l'inverse, on vient de prouver que :

$$\boxed{B \text{ est inversible et } B^{-1} = -\frac{1}{4}B + \frac{5}{4}I.}$$

On considère l'application

$$h : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & h(M) = AMB \end{cases}$$

2. h est clairement à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, pour $M, M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$h(\lambda M + \mu M') = A(\lambda M + \mu M')B = A(\lambda MB + \mu M'B) = \lambda AMB + \mu AM'B$$

Donc $h(\lambda M + \mu M') = \lambda h(M) + \mu h(M')$, ce qui prouve que :

$$\boxed{h \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

3. On a vu à la question 1d que B est inversible et que $B^{-1} = -\frac{1}{4}B + \frac{5}{4}I$. Il est clair par ailleurs que A est inversible et que $A^{-1} = A$. Ces constatations donnent :

$$\begin{aligned} h(M) = AMB = M' \quad &\Leftrightarrow \quad M = A^{-1}M'B^{-1} = AM' \times \left(-\frac{1}{4}B + \frac{5}{4}I\right) \\ &\Leftrightarrow \quad M = \frac{5}{4}AM' - \frac{1}{4}AM'B \end{aligned}$$

Il est ainsi prouvé que :

$$\boxed{h \text{ est inversible et } h^{-1}(M) = \frac{5}{4}AM - \frac{1}{4}AMB.}$$

4. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.

(a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $N = MP$, où P est la matrice définie à la question 1b. On a :

$$\begin{aligned} h(M) = \lambda M \quad &\Leftrightarrow \quad AMB = \lambda M \quad \Leftrightarrow \quad AMPDP^{-1} = \lambda M \\ &= \quad A(MP)D = \lambda(MP) \end{aligned}$$

Avec la relation $N = MP$, on peut écrire finalement :

$$\boxed{h(M) = \lambda M \iff AND = \lambda N.}$$

(b) On note $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} AND = \lambda N \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & 4y \\ -z & -4t \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)x & = & 0 \\ (4+\lambda)y & = & 0 \\ (\lambda-1)z & = & 0 \\ (\lambda-4)t & = & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour toute valeur de λ autre que $-1, -4, 1$ ou 4, on obtient $x = y = z = t = 0$. Pour $\lambda = -1$ (resp. $-4, 1, 4$), on peut prendre $x = 1$ (resp. $y = 1, z = 1, t = 1$) et les autres coefficients nuls. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Les réels } \lambda \text{ pour lesquels il existe une matrice } N \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ non nulle telle que } AND = \lambda N \text{ sont } -1, -4, 1 \text{ et } 4.}$$

(c) Ce résultat, ainsi que l'équivalence établie à la question 4a, servent à établir que :

$$\boxed{\mathrm{Spec}(h) = \{-1, -4, 1, 4\}}$$

h est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 4 et possède, comme on vient de le voir, 4 valeurs propres distinctes. On en conclut que : $\boxed{\begin{array}{c} h \text{ est diagonalisable et il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que} \\ D = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}h = \mathrm{diag}(-4, -1, 1, 4). \end{array}}$

(d) On note id l'endomorphisme identité et 0 l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si on se place dans la base de diagonalisation $\mathcal{B}$, la matrice de l'application $(h - id) \circ (h + id) \circ (h - 4id) \circ (h + 4id) = 0$ est :

$$(D - I_4) \times (D + I_4) \times (D - 4I_4) \times (D + 4I_4) = 0$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soient a, b et c trois réels fixés. On définit par récurrence la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$v_0 = a,\ v_1 = b,\ v_2 = c \text{ et pour tout } n \geqslant 0,\ v_{n+3} = \frac{v_{n+2} + v_{n+1} + v_n}{3}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on définit le vecteur $V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}$.

On définit également : $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On calcule :

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{v_{n+2} + v_{n+1} + v_n}{3} \\ v_{n+2} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{n+3} \\ v_{n+2} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \qquad V_{n+1} = AV_n}$$

On en déduit par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $V_n = A^n V_0$, puisque $V_1 = AV_0$ et si pour n fixé, on a $V_n = A^n V_0$, alors :

$$V_{n+1} = AV_n = A \times A^n V_0 = A^{n+1} V_0$$

2. (a) Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x - 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -1/3 & -1/3 \\ x-1 & x & 0 \\ x-1 & -1 & x \end{vmatrix} \qquad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\ \chi_A(x) &= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & x + 1/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & x + 1/3 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Après développement : $\chi_A(x) = \dfrac{1}{3}(x-1)(3x^2+2x+1)$. En particulier :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de la matrice } A.}$$

(b) Les deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 sont les racines (non réelles) du polynôme $3X^2+2X+1$. Après calculs, on trouve :

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{2}i}{3} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{-1+\sqrt{2}i}{3}.}$$

On a de plus :

$$\boxed{|\lambda_2| = |\lambda_3| = \frac{1}{\sqrt{3}}.}$$

(c) Le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, mais est scindé dans $\mathbb{C}$ à racines simples, donc :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{C}, \text{ mais pas dans } \mathbb{R}.}$$

3. (a) Il existe donc une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale. Il est facile d'établir par récurrence que si n est un entier supérieur à 1, $D^n = P^{-1}A^nP$, ce qui prouve que A^n et D^n sont semblables, et ont donc les mêmes valeurs propres. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les trois valeurs propres de } A^n \text{ sont } 1, \lambda_2^n \text{ et } \lambda_3^n.}$$

(b) On sait que $\begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} = V_n = A^nV_0 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$.

Il est clair qu'en développant ce produit de matrices et en examinant la troisième ligne, on obtient l'existence de trois nombres complexes α, β et γ (indépendants de n) tels que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boxed{v_n = \alpha + \beta\lambda_2^n + \gamma\lambda_3^n.}$$

(c) Soit $x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, on sait que $|\lambda_2 x| = |\lambda_3 x| = \dfrac{|x|}{\sqrt{3}} < 1$, d'où : Résumons :

$$x^n(v_n - \alpha) = \beta\,(\lambda_2 x)^n + \gamma\,(\lambda_3 x)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[,\ \lim_{n\to+\infty} x^n(v_n-\alpha) = 0.}$$

C'est vrai en particulier pour $x = 1$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \alpha = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge vers } \alpha, \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.}$$

(La limite d'une suite réelle est réelle et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in \mathbb{R}$.)

4. On pose pour tout $n \geqslant 0$, $w_n = v_n + 2v_{n+1} + 3v_{n+2}$. Alors :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} + 2v_{n+2} + 3v_{n+3} = v_{n+1} + 2v_{n+2} + 3 \times \frac{v_{n+2}+v_{n+1}+v_n}{3} \\ &= v_n + 2v_{n+1} + 3v_{n+2} = w_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 0$, $w_{n+1} = w_n$ et la suite (w_n) est stationnaire, ce qui implique que chaque terme est égal à la limite de la suite. En particulier, sachant que $v_n \to \alpha$:

$$w_0 = \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} v_n + 2v_{n+1} + 3v_{n+2} = 6\alpha$$

Compte tenu du fait que $w_0 = a + 2b + 3c$, on obtient :

$$\boxed{\alpha = \frac{a+2b+3c}{6}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Partie A :

Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice
$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

A.1 On sait que $A^3 = 0$, donc on peut éliminer toutes les puissances de A supérieures ou égales à 3 dans le calcul suivant :
$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= \left(I + sA + \frac{s^2}{2}A^2\right)\left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right) \\ &= I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + sA + stA^2 + \frac{s^2}{2}A^2 = I + (s+t)A + \frac{s^2+2st+t^2}{2}A^2 \\ &= I + (s+t)A + \frac{(s+t)^2}{2}A^2 = E(s+t) \end{aligned}$$
On a bien vérifié :
$$\boxed{\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)E(t) = E(s+t).}$$

A.2 Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur n que $\big(E(t)\big)^n = E(nt)$:
- ⋆ C'est clair pour $n = 0$.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose le résultat vrai au rang n.
$$\begin{aligned} \big(E(t)\big)^{n+1} &= \big(E(t)\big)^n \times E(t) \\ &= E(nt) \times E(t) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= E(nt + t) = E((n+1)t) \end{aligned}$$
- ⋆ En conclusion, le résultat est vrai pour tout entier n par récurrence.
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad E(nt) = \big(E(t)\big)^n.}$$

A.3 D'après la relation trouvée à la question 1, on a
$$E(t-t) = E(t + (-t)) = E(t)E(-t) = E(-t)E(t) = E(0) = I$$
$$\boxed{\text{La matrice } E(t) \text{ est inversible et } (E(t))^{-1} = E(-t).}$$

A.4 Soient λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\lambda_1 I + \lambda_2 A + \lambda_3 A^2 = 0 \tag{4}$$
Compte tenu du fait que $A^3 = 0$, on obtient les deux relations suivantes en multipliant deux fois l'expression (1) par A :
$$\lambda_1 A + \lambda_2 A^2 = 0 \tag{5}$$
$$\lambda_1 A^2 = 0 \tag{6}$$
Ainsi, sachant que $A^2 \neq 0$, on a successivement $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3$.
$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre dans l'espace vectoriel } \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).}$$

A.5 On remarque tout d'abord que l'application $t \mapsto E(t)$ n'est pas linéaire. Aussi, il faut revenir à la définition d'une application injective et montrer :
$$E(s) = E(t) \implies s = t$$
Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $E(s) = E(t)$, alors :
$$0 = E(s) - E(t) = (s-t)A + \frac{s^2 - t^2}{2}A^2$$
Puisque la famille (I, A, A^2) est libre, il vient nécessairement $s = t$ si on examine la composante en A.
$$\boxed{\text{L'application } E : t \mapsto E(t), \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ est injective.}}$$

A.6 On a immédiatement $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$. Ainsi :
$$\boxed{A \text{ est nilpotente d'ordre 3, et } E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Partie B :

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

B.1 Le polynôme caractéristique de f est :

$$\chi_f(x) = \begin{vmatrix} x-4 & 6 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

On en déduit que :

$$\boxed{\operatorname{Spec}(f) = \{1, 2\}}$$

B.2 Le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples, donc :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

Les coordonnées d'un élément (x, y) de E_1 sont données par le système :

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 6y & = & 0 \\ x - 2y & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y$$

Les coordonnées d'un élément (x, y) de E_2 sont données par le système :

$$(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 6y & = & 0 \\ x - 3y & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x = 3y$$

$$\boxed{\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \big((2,1), (3,1)\big) \text{ est une base de diagonalisation.}}$$

B.3 On déduit immédiatement de la question précédente que :

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

P^{-1} est donné par l'inversion du système :

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & x' \\ x + y & = & y' \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcll} y & = & x' - 2y' & (L_1 - 2L_2) \\ x & = & -x' + 3y' & (3L_2 - L_1) \end{array} \right.$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

B.4 Il est immédiat que :

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

De plus, on a $A^0 = PD^0P^{-1}$, et si on suppose au rang k qu'on a $A^k = PD^kP^{-1}$, alors :

$$A^{k+1} = A \times A^k = PDP^{-1} \times PD^kP^{-1} = PDD^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$$

Donc par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}}$$

Il reste à faire le calcul :

$$\begin{array}{rcl} PD^kP^{-1} & = & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2 & 3 \times 2^n \\ 1 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3 \times 2^n & 6 - 3 \times 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -2 + 3 \times 2^n & 6 - 3 \times 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}}$$

Partie C :

On reprend les notations de la partie B. On rappelle que pour tout réel t, on a $e^t = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right)$.

C.1 Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on a, d'après le calcul de la partie B :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix} -2+3\times 2^k & 6-3\times 2^{k+1} \\ -1+2^k & 3-2^{k+1}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_n(t) = \begin{pmatrix} -2\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} + 3\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k!} & 6\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} - 6\times\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k!} \\ -\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k!} & 3\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2t)^k}{k!}\end{pmatrix}}$$

C.2 Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t)\end{pmatrix}$, avec :

$$a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t) \quad ; \quad b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t) \quad ; \quad c(t) = \lim_{n\to+\infty} c_n(t) \quad ; \quad d(t) = \lim_{n\to+\infty} d_n(t).$$

On a immédiatement, avec la définition de l'exponentielle sous forme de série :

$$\boxed{E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t}-2e^t & 6e^t-6e^{2t} \\ -e^t+e^{2t} & 3e^t-2e^{2t}\end{pmatrix}}$$

C.3 On peut réécrire ainsi le résultat :

$$E(t) = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3\end{pmatrix}e^t$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad E(t) = e^{2t}Q + e^tR \quad \text{avec : } Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2\end{pmatrix} \text{ et : } R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3\end{pmatrix}}$$

C.4 Les calculs donnent immédiatement :

$$\boxed{Q^2 = Q,\ \ R^2 = R,\ \ QR = RQ = 0}$$

D'où $q\circ q = q$ et $r\circ r = r$. Les applications q et r sont des projecteurs. On lit sur les vecteurs colonnes des matrices que $\operatorname{Im} q = \operatorname{Vect}(3,1)$ et $\operatorname{Im} r = \operatorname{Vect}(2,1)$. On trouve également rapidement que $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Vect}(2,1) = \operatorname{Im} r$ et $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Vect}(3,1) = \operatorname{Im} q$. Ceci explique que $q\circ r = 0$ et $r\circ q = 0$.

$$\boxed{q \text{ est la projection sur } \mathbb{R}\overrightarrow{v} \text{ parallèlement à } \mathbb{R}\overrightarrow{u}, \text{ et } r \text{ la projection sur } \mathbb{R}\overrightarrow{u} \text{ parallèlement à } \mathbb{R}\overrightarrow{v}.}$$

C.5 Soit $(s,t)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} E(t)E(s) &= (e^{2t}Q+e^tR)(e^{2s}Q+e^sR) = e^{2t+2s}Q^2 + e^{2t}e^sQR + e^te^{2s}RQ + e^{t+s}R^2 \\ &= e^{2(s+t)}Q + e^{t+s}R = E(t+s)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (s,t)\in\mathbb{R}^2 \qquad E(s)E(t) = E(s+t).}$$

De même qu'en A.2 et A.3, on a :

$$\boxed{\left(E(t)\right)^n = E(nt) \quad \text{et} \quad \left(E(t)\right)^{-1} = E(-t)}$$

On suppose maintenant que $E(t) = E(s)$, alors :

$$(e^{2t}-e^{2s})Q + (e^t-e^s)R = 0$$

La famille (Q,R) est clairement libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, donc ceci entraîne $e^t = e^s$, et donc $t = s$.

$$\boxed{\text{L'application } E : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & E(t)\end{array}\right. \text{ est injective.}}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est à dire qui vérifient la relation :

$$M.M^T = M^T.M \quad (1)$$

Partie I :

Dans toute cette partie, les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est à dire ayant deux lignes, deux colonnes et des coefficients réels.

On notera en particulier $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. $AA^T = A^TA = A^2 = I$ et $CC^T = C^TC = I$:

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } C \text{ vérifient la relation (1).}}$$

2. D'après la question précédente :

$$\boxed{A^2 = I}$$

Pour tout entier naturel n non nul :

⋆ Si $n = 2k$ est pair, alors $A^{2k} = (A^2)^k = I^k = I$.

⋆ Si $n = 2k+1$ est impair, alors $A^{2k+1} = (A^2)^k \times A = A$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } A^n \text{ vérifie la relation (1).}}$$

3. Puisque $A^2 = I$, alors :

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = A.}$$

On note u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est A.

4. Il est immédiat que :

$$\boxed{u(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j} \text{ et } u(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}.}$$

puisque $A^2 = I$, alors $u \circ u = Id_{\mathbb{R}^2}$, donc u est une symétrie, et :

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y & = & 0 \\ x - y & = & 0 \end{cases} \iff x = y$$

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{cases} \iff x = -y$$

$$\boxed{u \text{ est la symétrie par rapport à } \mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) \text{ parallèlement à } \mathbb{R}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}).}$$

Dans toute la suite, on notera $U = A + I$.

5. On a $U^TU = (A+I)^TU = (A^T + I^T)U = (A+I)U = U^2 = UU^T$, donc :

$$\boxed{\text{La matrice } U \text{ vérifie la relation (1).}}$$

Remarquons que $U^2 = (A+I)^2 = A^2 + 2AI + I = 2AI + 2A = 2(A+I) = 2U$.

On peut conjecturer que $U^n = 2^{n-1}U$.

⋆ C'est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$.

⋆ Si c'est vrai au rang n, alors :

$$U^{n+1} = U^n \times U = 2^{n-1}U \times U = 2^{n-1}U^2 = 2^{n-1} \times 2U = 2^nU$$

Par récurrence, il est prouvé que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U^n = 2^{n-1}U}$$

En conséquence, $(U^n)^TU^n = (2^{n-1}U)^T2^{n-1}U = 4^{n-1}U^TU = 4^{n-1}UU^T = U^n(U^n)^T$.

$$\boxed{\text{Toutes les puissances } U^n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ vérifient (1).}}$$

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6. $A + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, et :

$$(A+C)(A+C)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A+C)^T(A+C) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A+C)(A+C)^T \neq (A+C)^T(A+C)$. Les deux matrices A et C sont dans E_2 mais pas leur somme, et ceci montre que :

$$\boxed{E_2 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

7. Soit une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M^T M = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad MM^T = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

M appartient à E_2 si et seulement si a, b, c et d vérifient le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2+c^2 & = & a^2+b^2 \\ b^2+d^2 & = & c^2+d^2 \\ ab+cd & = & ac+bd \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c & = & -b \\ b(a-d) & = & b(d-a) \end{array} \right. , \text{ ou } b = c$$

On trouve deux conditions nécessaires et suffisantes : $\left\{ \begin{array}{rcl} b=-c & \neq & 0 \\ a=d & & \end{array} \right.$, ou $b = c$.

$$\boxed{\text{Les matrices de } E_2 \text{ sont les matrices : } \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ avec } a, b, d \in \mathbb{R}.}$$

8. Remarquons que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + bA + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,\text{et} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aI - bC$$

$$\boxed{E_2 \text{ est la réunion des deux sous-espaces vectoriels Vect} \left\{ A, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et Vect}\{I, C\}}$$

Il est clair que les familles génératrices données sont des bases de ces espaces.

9. Les matrices C et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans E_2, et :

$$C \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue par le produit n'est pas une matrice de E_2 car sa forme n'est pas une de celles trouvées en 7.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ et } N \text{ sont deux matrices de } E_2, \text{ on n'a pas nécessairement } M.N \in E_2.}$$

Partie II :

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\,\overrightarrow{k})$.

On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\overrightarrow{i}) = -\overrightarrow{k}$, $h(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$ et $h(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{j}$. On note $S = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(h)$.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_3.

10. On a :

$$\boxed{S = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

11. Un calcul montre que :

$$\boxed{S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -S^T}$$

Puis $S^T S = SS^T = I$, et $(S^2)^T S^2 = I = S^2(S^2)^T$.

$$\boxed{S \text{ et } S^2 \text{ sont dans } E_3.}$$

12. Soient a, b et c des réels. En utilisant $S^T S = SS^T$, on a :

$$\begin{array}{rcl} R^T R & = & (aI+bS+cS^2)^T(aI+bS+cS^2) = (aI+bS^T+c(S^2)^T)(aI+bS+cS^2) \\ & = & a^2I + b^2S^TS + c^2(S^2)^TS^2 + ab(S+S^T) + ac(S^2+(S^2)^T) + bc(S^TS^2+(S^2)^TS) \\ & = & a^2I + b^2SS^T + c^2S^2(S^2)^T + ab(S^T+S) + ac((S^2)^T+S^2) + bc(S^2S^T+S(S^2)^T) \\ & = & (aI+bS+cS^2)(aI+bS^T+c(S^2)^T) = RR^T \end{array}$$

$$\boxed{\text{La matrice } R = aI + bS + cS^2 \text{ appartient à } E_3.}$$

13. On note $F = \text{Vect}(I, S, S^2)$. On vient de montrer que $F \subset E_3$. De plus, il est clair que la famille (I, S, S^2) est libre, donc F est de dimension 3 :

$$\boxed{E_3 \text{ contient un espace vectoriel } F = \text{Vect}(I, S, S^2) \text{ de dimension 3.}}$$

14. Remarquons que $S^3 = -I$ et :

$$\begin{array}{rcl} (aI + bS + cS^2)(a'I + b'S + c'S^2) & = & aa'I + bb'S^2 + cc'S^4 + (ab' + ba')S + (ac' + ca')S^2 + (bc' + cb')S^3 \\ & = & (aa' - bc' - cb')I + (ab' + ba' - cc')S + (bb' + ac' + ca')S^2 \end{array}$$

Le produit de deux éléments de F reste donc dans F :

$$\boxed{F \text{ est stable par multiplication matricielle.}}$$

Partie III :

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $\mathcal{B}'' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$.

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

où a est un réel quelconque, et on appelle u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}''}(u) = B$.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4.

15. Calculons :

$$B^T B = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BB^T = \begin{pmatrix} 3+a^2 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On voit que l'égalité entre les deux matrices est réalisée si et seulement si $a = -1$. D'où :

$$\boxed{B \text{ est un élément de } E_4 \text{ si et seulement si } a = -1.}$$

Dans la suite, on pose $a = -1$. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Pour trouver une base de $\operatorname{Ker} u$, on résout le système :

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z + t & = & 0 \\ x - t & = & 0 \\ x + y - z + t & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcll} x & = & t & (2) \\ y & = & z + 2t & (1) \\ 2x + 2t & = & 0 & (1) + (3) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t = 0 \\ y & = & z \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Ker}(u) = \text{Vect}(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})}$$

et ce vecteur forme clairement une base de $\text{Ker}(u)$. On en déduit avec le théorème du rang que $\dim(\operatorname{Im} u) = 3$ et en observant les vecteurs colonne :

$$\boxed{\text{Im}(u) = \text{Vect}(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4})}$$

et ces vecteurs forment une base de $\operatorname{Im} u$.

17. On fait les calculs :

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc $u(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4}) = 2(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4})$ et $u(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}) = 2(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$.

$$\boxed{\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_4} \text{ et } \overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}-\overrightarrow{e_4} \text{ sont des vecteurs propres de } u \text{ associés à la valeur propre 2.}}$$

18. On a vu aux questions précédentes que 0 était valeur propre simple et 2 valeur propre d'ordre au moins 2. Or, on sait que la somme des valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) est égale à la trace de la matrice, donc si λ est la dernière valeur propre, on a :

$$0+2+2+\lambda=2 \quad \text{d'où :} \quad \lambda=-2$$

Pour trouver un vecteur propre associé, il suffit de résoudre le système :

$$(B+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+z+t &=& 0 \\ -x+2y+t &=& 0 \\ x+2z-t &=& 0 \\ x+y-z+3t &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} 4x+4t &=& 0 & (1)+(4) \\ 2y+2z &=& 0 & (2)+(3) \\ x+2z-t &=& 0 & \\ x+y-z+3t &=& 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} t &=& -x \\ z &=& -y \\ x &=& y \end{array}\right.$$

On en déduit que :

$$\boxed{-2 \text{ est la dernière valeur propre, associée au vecteur propre } \overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}-\overrightarrow{e_4}.}$$

19. En regroupant les résultats des questions précédentes, on a prouvé :

$$\boxed{B=P\Delta P^{-1}, \text{ avec } \Delta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

20. En procédant à une récurrence, de même que dans l'exercice 1 question B.4, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n=P\Delta^n P^{-1}}$$

Avec ce calcul, on trouve :

$$B^{2p}=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p} \end{pmatrix}P^{-1}=2^{2p-2}P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}=2^{2p-2}B^2$$

$$B^{2p+1}=P\begin{pmatrix} 2\times 2^{2p} \end{pmatrix}P^{-1}=2^{2p}P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}=2^{2p}B$$

$$\boxed{B^{2p}=2^{2p-2}B^2 \quad \text{et} \quad B^{2p+1}=2^{2p}B}$$

Avec le calcul de $B^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, on trouve :

$$\boxed{B^{2p}=\begin{pmatrix} 2^{2p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2p-1} & -2^{2p-1} & 0 \\ 0 & -2^{2p-1} & 2^{2p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p} \end{pmatrix} \text{ et } B^{2p+1}=\begin{pmatrix} 2^{2p} & -2^{2p} & 2^{2p} & 2^{2p} \\ -2^{2p} & 0 & 0 & 2^{2p} \\ 2^{2p} & 0 & 0 & -2^{2p} \\ 2^{2p} & 2^{2p} & -2^{2p} & 2^{2p} \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Réduction de la matrice A.

   1.1 Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-5 & -3 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 8x + 12$$

   Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 64 - 48 = 16 = 4^2$, donc deux solutions :

$$\lambda_1 = \frac{8+4}{2} = 6 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{8-4}{2} = 2$$

$$\boxed{\operatorname{Spec}(A) = \{6, 2\}}$$

   1.2 Recherchons maintenant les sous-espaces propres associées :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_6 \quad &\Longleftrightarrow \quad (A-6I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad x - 3y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad (A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad x + y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -y \end{aligned}$$

   On en déduit que :

$$\boxed{E_6 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

   1.3 D'après la question précédente :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

2. Soit $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   2.1 Dans cette question, nous supposons que : $N^2 + N = D$.

      21.1 D'après la relation supposée, on a :

$$ND = N(N^2+N) = N^3 + N^2 = (N^2+N)N = DN$$

      Les matrices N et D commutent, or :

$$ND = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 6z & 2t \end{pmatrix}$$

$$DN = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 2z & 2t \end{pmatrix}$$

      d'où $6y = 2y$, et $6z = 2z$, ce qui entraîne :

$$\boxed{y = z = 0}$$

      21.2 Revenons à la relation $N^2 + N = D$, avec :

$$N^2 + N = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + x & 0 \\ 0 & y^2 + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

      Par identification les relations suivantes sont immédiates :

$$\boxed{\begin{cases} t^2 + t = 2 \\ x^2 + x = 6 \end{cases}}$$

21.3 L'équation t^2+t-2 a pour solutions 1 et -2. L'équation x^2+x-6 a pour solutions 2 et -3, ce qui donne quatre valeurs possibles pour la matrice N :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

2.2 Un calcul immédiat de N^2+N montre dans chacun des cas que les quatre matrices N obtenues à la question 2(1)3 vérifient l'égalité matricielle : $N^2+N=D$.

3. Soit M appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notons : $N=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, x,y,z,t appartenant à $\mathbb{R}$, la matrice appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $N=P^{-1}MP$.

3.1 Le calcul de P^{-1} est donné par l'inversion du système $PX=X' \iff X=P^{-1}X'$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 3x-y=x' \\ x+y=y' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4x=x'+y' & (L_1+L_2) \\ 4y=3y'-x' & (3L_2-L_1) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Avec la relation $M=PNP^{-1}$, nous pouvons conclure après calcul :

$$\boxed{M=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x-3y-z+t & 3x+9y-z-3t \\ x-y+z-t & x+3y+z+3t \end{pmatrix}}$$

3.2 Remarquons que $P^{-1}M^2P=P^{-1}MP\times P^{-1}MP=N^2$. Ensuite :

$$\begin{aligned} M^2+M=A &\iff P^{-1}(M^2+M)P=P^{-1}AP \\ &\iff P^{-1}M^2P+P^{-1}MP=D \\ &\iff N^2+N=D \end{aligned}$$

$$\boxed{M^2+M=A \quad\iff\quad N^2+N=D}$$

3.3 On en déduit que l'ensemble des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2+M=A$ est l'ensemble des matrices de la forme $M=PNP^{-1}$ avec $N^2+N=D$.

Il s'agit des matrices de la forme trouvée en 31, avec $y=z=0$, $x\in\{-3,2\}$ et $t\in\{-2,1\}$:

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & -12 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right\}}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

On définit, pour tout réel a, la matrice :

$$M_a=\begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$$

1. (a) On sait que M_a est inversible si et seulement si $\det M_a \neq 0$. Or :

$$\det M_a=\begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ 2 & a+2 \end{vmatrix}=(a-1)(a+2)+2=a^2+a=a(a+1)$$

$$\boxed{M_a \text{ est inversible si et seulement si } a\neq 0 \text{ et } a\neq -1.}$$

(b) De même, on peut écrire en utilisant le calcul précédent :

$$\chi_{M_a}(x)=\begin{vmatrix} x-a+1 & 1 \\ -2 & x-a-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (a-x)-1 & -1 \\ 2 & (a-x)+2 \end{vmatrix}=(a-x)(a-x+1)$$

$$\boxed{\mathrm{Spec}(M_a)=\{a,a+1\}}$$

2. On cherche alors les sous-espaces propres de la matrice M_a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_a \iff (A-aI)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff -x-y=0 \iff y=-x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{a+1} \iff (A-(a+1)I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff 2x+y=0 \iff y=-2x$$

$$\boxed{E_a = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{1+a} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}$$

3. D'après la question précédente :

$$\boxed{D_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1+a \end{pmatrix} = P^{-1}M_aP \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Le calcul de P^{-1} est donné par l'inversion du système $PX = X' \iff X = P^{-1}X'$, c'est à dire :

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y=x' \\ -x-2y=y' \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=2x'+y' & (2L_1+L_2) \\ y=-x'-y' & (-L_1-L_2) \end{cases}$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

4. Soit a et b deux nombres réels. Il est clair que les matrices D_a et D_b commutent, et :

$$M_aM_b = PD_aP^{-1}PD_bP^{-1} = PD_aD_bP^{-1} = PD_bD_aP^{-1} = PD_bP^{-1}PD_aP^{-1} = M_bM_a$$

$$\boxed{M_aM_b = M_bM_a}$$

5. Soit n un entier naturel non nul. On considère la matrice A_n suivante :

$$A_n = M_1M_2M_3\dots M_n$$

Montrons par récurrence que $A_n = PD_1D_2\dots D_nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

⋆ On a par définition $A_1 = M_1 = PD_1P^{-1}$.

⋆ On suppose que pour n fixé, on a $A_n = PD_1D_2\dots D_nP^{-1}$, alors :

$$A_{n+1} = A_n \times M_{n+1} = PD_1D_2\dots D_nP^{-1} \times PD_{n+1}P^{-1} = PD_1D_2\dots D_nD_{n+1}P^{-1}$$

donc le résultat est vérifié au rang $n+1$.

⋆ Par récurrence, le résultat est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

Or $D_1D_2\dots D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n! & 0 \\ 0 & (n+1)! \end{pmatrix}$ d'où :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n! & 0 \\ 0 & (n+1)! \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_n = \begin{pmatrix} (1-n)n! & -n.n! \\ 2n.n! & (2n+1)n! \end{pmatrix}}$$

6. On considère deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $u_1=-2$, $v_1=4$ et qui vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n-1)u_n - v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + (n+2)v_n.$$

Il est clair que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & n+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, et on montre facilement par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M_{n-1} \dots M_2 M_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = M_1 M_2 \dots M_{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = A_{n-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(on utilise au passage le résultat de la question 4). D'où, après simplifications :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = -2n! \quad \text{et} \quad v_n = 4n!}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \quad \text{où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P.$$

1. (a) On sait que la base canonique de E est $(1, X, X^2, X^3)$:

$$\boxed{\dim E = 4}$$

(b) f est un endomorphisme de E si et seulement si f est linéaire et si l'image des éléments de la base canonique est dans E.

Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q)(X) &= -3X(\lambda P + \mu Q)(X) + X^2(\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= -3X(\lambda P(X) + \mu Q(X)) + X^2(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) \\ &= \lambda(-3XP(X) + X^2P'(X)) + \mu(-3XQ(X) + X^2Q'(X)) \\ f(\lambda P + \mu Q)(X) &= \lambda f(P)(X) + \mu f(Q)(X) \end{aligned}$$

donc f est linéaire. Par ailleurs :

$$\begin{cases} f(1)(X) &= -3X \\ f(X)(X) &= -3X^2 + X^2 = -2X^2 \\ f(X^2)(X) &= -3X^3 + 2X^3 = -X^3 \\ f(X^3)(X) &= -3X^4 + 3X^4 = 0 \end{cases}$$

donc les images des éléments de la base canonique sont dans l'espace E.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

(c) On en déduit la matrice M de f dans la base canonique de E :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

(d) On a clairement $\det M = 0$, donc :

$$\boxed{M \text{ n'est pas inversible.}}$$

Le polynôme caractéristique est $\chi_M(x) = x^4$, ce qui signifie que 0 est la seule valeur propre. Il est clair que M n'est pas semblable à la matrice nulle (car sinon on a $M = 0$), donc :

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

On peut en revanche constater que M est nilpotente, puisque :

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \; M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \; \forall n \geqslant 4, \; M^n = 0.}$$

(e) Cherchons $\operatorname{Ker} M$:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} -3x = 0 \\ -2y = 0 \\ -z \end{array} \right. = 0 \iff x = y = z = 0$$

D'où $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^3)}$$

Le polynôme X^3 forme une base de $\operatorname{Ker} f$.

(f) Ensuite $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \operatorname{Vect}(-3X, -2X^2, -X^3)$.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X, X^2, X^3)}$$

2. On note Id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \operatorname{Id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.

Soit u et g deux endomorphismes de E tels que $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \operatorname{Id}_E + u + u^2 + u^3$.

(a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \operatorname{Ker}(u^3)$. Alors $u^3(P) \neq 0$ et $u^4(P) = 0$.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_0 P + \lambda_1 u(P) + \lambda_2 u^2(P) + \lambda_3 u^3(P) = 0$$

En composant trois fois successivement par u, on a les relations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_0 u(P) + \lambda_1 u^2(P) + \lambda_2 u^3(P) & = & 0 \\ \lambda_0 u^2(P) + \lambda_1 u^3(P) & = & 0 \\ \lambda_0 u^3(P) & = & 0 \end{array} \right.$$

D'où, puisque $u^3(P) \neq 0$, on trouve $0 = \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. La famille $\big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une famille libre de 4 éléments de E, et puisque $\dim E = 4$:

$$\boxed{\text{La famille } \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big) \text{ est une base de } E.}$$

On peut alors remarquer que, dans cette base, la matrice de u est :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) D'après la question précédente, la matrice de g dans la base $\big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est :

$$G = I + U + U^2 + U^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est 1 (produit des éléments diagonaux), ainsi :

$$\boxed{g \text{ est un automorphisme de } E}$$

Remarquons ensuite que :

$$\begin{array}{rcl} (\operatorname{Id}_E - u) \circ (\operatorname{Id}_E + u + u^2 + u^3) & = & \operatorname{Id}_E + u + u^2 + u^3 - (u + u^2 + u^3 + u^4) \\ & = & Id_E = (\operatorname{Id}_E + u + u^2 + u^3) \circ (\operatorname{Id}_E - u) \end{array}$$

On en conclut que :

$$\boxed{g^{-1} = \operatorname{Id}_E - u}$$

(c) Il est évident que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$, car si $Q \in \operatorname{Ker} u$, on trouve :

$$(g - \mathrm{Id}_E)(Q) = (u + u^2 + u^3)(Q) = u(Q) + u^2(Q) + u^3(Q) = 0 + 0 + 0 = 0$$

donc $Q \in \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$.
Réciproquement, si $Q \in \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$, alors $u(Q) + u^2(Q) + u^3(Q) = 0$. En composant deux fois par u, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(Q) + u^2(Q) + u^3(Q) & = & 0 \\ u^2(Q) + u^3(Q) & = & 0 \\ u^3(Q) & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où $0 = u^3(Q) = u^2(Q) = u(Q)$, et $Q \in \operatorname{Ker} u$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)}$$

(d) Il est évident, d'après la question 2b, que le polynôme caractéristique de g est $\chi_g(x) = (x-1)^4$, donc :

$$\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } g.}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

I **Quelques calculs préliminaires.**

Considérons la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3.

I.1 Étude des éléments propres de M.

I1.a Calculons le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned} \chi_M(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 0 & x-2 & x-2 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &= \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -2 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ &= (x-2)[(x-3)(x-1)+1] = (x-2)(x^2-4x+4) = (x-2)^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Spec}(M) = \{2\}}$$

I1.b Le sous-espace propre E_2 de M est donné par le système :

$$(M - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 0 \\ x - y & = & 0 \\ -x + y & = & 0 \end{array}\right. \iff x = y = -z$$

$$\boxed{E_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

I.2 Étude des éléments propres de $M^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

I2.a On sait que le déterminant est invariant par transposition, d'où :

$$\chi_{M^T}(x) = \det(M^T - xI) = \det\left((M - xI)^T\right) = \det(M - xI) = \chi_M(x)$$

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ et } M^T \text{ ont le même polynôme caractéristique.}}$$

Les valeurs propres de M^T sont en conséquence les mêmes que celles de M, comptées avec multiplicité :

$$\boxed{\mathrm{Spec}(M^T) = \{2\}}$$

I2.b Le sous-espace propre E_2' de M^T est donné par le système :

$$(M^T - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 2x &= 0 \end{cases} \iff x = 0 \text{ et } y = z$$

$$\boxed{E_2' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

II **Quelques généralités.**

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E.

II.1 On a trivialement :

- $\star$ $\forall \overrightarrow{x} \in \{\overrightarrow{0}\},\ f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0} \in \{\overrightarrow{0}\}$.
- $\star$ $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ f(\overrightarrow{x}) \in E$ car f est un endomorphisme de E.

$$\boxed{\{\overrightarrow{0}\} \text{ et } E \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E \text{ stables par } f.}$$

II.2 Soit F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\overrightarrow{0}$ et de dimension finie. Notons p la dimension de F et introduisons $\mathcal{B}_F = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une base de F.

Si F est stable par f, alors par définition, on a en particulier $\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(\overrightarrow{u_k}) \in F$.

Réciproquement, on suppose que $\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(\overrightarrow{u_k}) \in F$. Soit $\overrightarrow{x} \in F$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{u_k}$$

et par composition, on a en utilisant la linéarité de f :

$$f(\overrightarrow{x}) = \lambda_1 \underbrace{f(\overrightarrow{u_1})}_{\in F} + \lambda_2 \underbrace{f(\overrightarrow{u_2})}_{\in F} + \cdots + \lambda_k \underbrace{f(\overrightarrow{u_k})}_{\in F}$$

$f(\overrightarrow{x})$ est combinaison linéaire d'éléments de F, ce qui entraîne $f(\overrightarrow{x}) \in F$. F est donc stable par f. On peut conclure :

$$\boxed{F \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si } \forall k \in [\![1, p]\!],\ f(\overrightarrow{u_k}) \in F.}$$

II.3 Droites vectorielles stables par f.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 1, et $\mathcal{B}_F = (\overrightarrow{u})$ une base de F.

On sait d'après la question précédente que F est stable par f si et seulement si $f(\overrightarrow{u}) \in F$, c'est à dire si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$. D'où :

$$\boxed{F \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si } \overrightarrow{u} \text{ est un vecteur propre de } f.}$$

III **Étude des plans stables en dimension 3.**

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, dont une base est $\mathcal{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Soit f un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}_E$.

III.1 Mise en place de l'équation de F dans la base $\mathcal{B}_E$.

Soit $\mathcal{B}_F = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ une base de F.

III1.a $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une famille libre de E, donc on peut la compléter en une base de E d'après le théorème de la base incomplète :

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } \overrightarrow{u_3} \text{ de } E \text{ tel que la famille } \mathcal{U}_E = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) \text{ soit une base de } E.}$$

III1.b On introduit la matrice de passage Q de la base $\mathcal{U}_E$ à la base $\mathcal{B}_E$:

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Si a, b et c étaient tous nuls, alors la matrice Q serait de rang inférieur ou égal à 2, donc non inversible. Ce n'est pas le cas car Q est une matrice de passage :

$$\boxed{a, b \text{ et } c \text{ sont non tous nuls.}}$$

III1.c Soit $\overrightarrow{x}$ appartenant à E.

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}_E$,

et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{U}_E$.

On a, en utilisant la formule du changement de base :

$$\boxed{X' = QX = \begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \\ ax + by + cz \end{pmatrix}}$$

En examinant la troisième composante, on trouve :

$$\boxed{x'_3 = ax_1 + bx_2 + cx_3}$$

III1.d Or on sait que $\overrightarrow{x} \in F$ si et seulement si $x'_3 = 0$, donc :

$$\boxed{\overrightarrow{x} \in F \quad \Longleftrightarrow \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.}$$

La condition $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ est appelée *l'équation de F dans la base $\mathcal{B}_E$*, nous admettrons qu'elle est indépendante du choix de la base $\mathcal{U}_E$.

III.2 Condition nécessaire et suffisante de stabilité de F par f.

III2.a Dans cette question, nous supposerons F stable par f donc en particulier, on a $f(\overrightarrow{u_1}) \in F$ et $f(\overrightarrow{u_2}) \in F$. D'où :

Il existe $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(\overrightarrow{u_1}) = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2}$ et $f(\overrightarrow{u_2}) = \beta_1\overrightarrow{u_1} + \beta_2\overrightarrow{u_2}$.

En notant ensuite $f(\overrightarrow{u_3}) = \gamma_1\overrightarrow{u_1} + \gamma_2\overrightarrow{u_2} + \gamma\overrightarrow{u_3}$, on trouve :

$$B = \mathcal{M}at_{\mathcal{U}_E} f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \gamma \in \mathbb{R}$$

De plus, on sait par la formule du changement de base, que $A = Q^{-1}BQ$, soit $QA = BQ$. Par transposition, l'égalité est conservée :

$$(QA)^T = (BQ)^T \quad \text{donc :} \quad A^TQ^T = Q^TB^T$$

$$\boxed{A^TQ^T = Q^TB^T}$$

Plus précisément, on a la relation :

$$A^T \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ c_1 & c_2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ c_1 & c_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & \gamma a \\ * & * & \gamma b \\ * & * & \gamma c \end{pmatrix}$$

En identifiant la troisième colonne de chaque côté de l'égalité, on trouve :

$$A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Autrement dit, compte-tenu du fait que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\text{Le vecteur } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A^T.}$$

III2.b Réciproquement, on suppose que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A^T, de valeur propre λ.

Par définition :

$$A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Cette égalité est conservée lorsqu'on passe à la transposée :

$$\left(A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^T A = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^T$$

ce qui s'écrit également :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times A = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}}$$

Soit $\overrightarrow{x}$ appartenant à E.

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}_E$,

et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $f(\overrightarrow{x})$ dans la base $\mathcal{B}_E$.

L'écriture matricielle de $f(\overrightarrow{x})$ est $Y = AX$, d'où :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} AX = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} X$$

Ce qui donne, après calcul :

$$\boxed{ay_1 + by_2 + cy_3 = \lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3)}$$

Ainsi, si $\overrightarrow{x} \in F$, on a $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, et d'après ce qui précède : $ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$, ce qui signifie que $f(\overrightarrow{x}) \in F$. Conclusion :

$$\boxed{F \text{ est stable par } f.}$$

IV Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, dont une base est $\mathcal{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Soit f un endomorphisme de E de matrice M dans la base $\mathcal{B}_E$, avec :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

D'après les résultats des parties II et III, les sous-espaces vectoriels stables par F sont :
— $\{\overrightarrow{0}\}$, E.
— Les droites stables, c'est à dire les sous-espaces du type $F = \text{Vect}(\overrightarrow{u})$, où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de E.
— Les plans stables, c'est à dire les plans d'équation :

$$ax_1 + b_2 + cx_3 = 0, \quad \text{où } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A^T.$$

D'après les résultats de la question I :

$$\boxed{\text{Les sous-espaces de } E \text{ stables par } f \text{ sont } \{\overrightarrow{0}\},\ E,\ D = \mathbb{R}(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}), \text{ et } P : x_2 + x_3 = 0.}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. (a) Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$:
   - ⋆ C'est clair pour $k = 0$ et $k = 1$.
   - ⋆ On suppose que le résultat est vrai à un rang k fixé, alors :

$$A^{k+1} = A \times A^k = PBP^{-1} \times PB^kP^{-1} = PBB^kP^{-1} = PB^{k+1}P^{-1}$$

   donc le résultat est vrai au rang $k + 1$.

Par récurrence, on a ainsi prouvé :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ A^k = PB^kP^{-1}}$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$, et $a_0, \dots, a_N$ des réels. Par linéarité du produit matriciel, il s'ensuit :

$$P\left(\sum_{k=0}^{N} a_k B^k\right)P^{-1} = \sum_{k=0}^{N} a_k \left(PB^kP^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k$$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ \ \forall a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{N} a_k A^k = P\left(\sum_{k=0}^{N} a_k B^k\right)P^{-1}}$$

(c) Lorsque B est la matrice diagonale : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, on a immédiatement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k B^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda_n^k \end{pmatrix}}$$

On peut remarquer qu'il s'agit encore d'une matrice diagonale.

2. On considère dans la suite les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = \det(xI - A) &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -x & -1 & x \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 - C_3) \\ &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -2 & x \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ &= x(x^2-2) = x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Il reste à chercher les sous-espaces propres de A :

$\star$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0$ si et seulement si $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résout donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x+z & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad z = -x \text{ et } y = 0$$

On en déduit que $E_0 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\star$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}$ si et seulement si $(A - \sqrt{2}I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résout donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\sqrt{2}x + y & = & 0 \\ x - \sqrt{2}y + z & = & 0 \\ y - \sqrt{2}z & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{2}x = \sqrt{2}z$$

On en déduit que $E_{\sqrt{2}} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\star$ De même, on trouve $E_{-\sqrt{2}} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

En conclusion :

$$\boxed{A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Remarquons que $I, A, J \in \mathcal{F}$ donc $\text{Vect}(I, A, J) \subset \mathcal{F}$. De plus, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$M(a, b, c) = aI + bJ + cA$$

donc $M(a, b, c) \in \text{Vect}(I, J, A)$. $\mathcal{F} \subset \text{Vect}(I, J, A)$

$$\boxed{\mathcal{F} = \text{Vect}(I, J, A) \text{ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille } (I, J, A)}$$

Par ailleurs (I, J, A) est clairement une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc une base de $\mathcal{F}$.

(c) Remarquons que $M(a, b, c)$ est une matrice symétrique réelle, donc :

$$\boxed{\text{Toute matrice } M(a, b, c) \text{ de } \mathcal{F} \text{ est diagonalisable.}}$$

(d) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc on a immédiatement :

$$\boxed{A^2 = I + J}$$

(e) $M(a, b, c) = aI + bJ + cA = aI + b(A^2 - I) + cA = (a - b)I + cA + bA^2$.

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad M(a, b, c) = (a - b)I + cA + bA^2}$$

(f) On utilise ici le résultat de la question 1 :

$$\begin{aligned} M(a, b, c) &= (a - b)I + cA + bA^2 = P((a - b)I + cD + bA^2)P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} a - b & 0 & 0 \\ 0 & a - b + c\sqrt{2} + 2b & 0 \\ 0 & 0 & a - b - c\sqrt{2} + 2b \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} a - b & 0 & 0 \\ 0 & a + b + c\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a + b - c\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les valeurs propres de } M(a, b, c) \text{ sont } a - b, a + b + c\sqrt{2}, a + b - c\sqrt{2}, \text{ de vecteurs propres} \\ \text{respectifs } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\end{array}}$$

3. **Application en physique**

(a) On a immédiatement :

$$\boxed{X''(t) = M(t) \ \text{ avec : } M = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{pmatrix}}$$

(b) On constate alors que :

$$\boxed{M = -2\omega_0^2 I + \omega_0^2 A}$$

(c) Remarquons que $M = M(-2\omega_0^2, 0, \omega_0^2)$. En utilisant les résultats de la question 2, on trouve :

$$\boxed{M = P'D'P'^{-1} \quad \text{avec} \quad D' = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2}-2)\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\sqrt{2}+2)\omega_0^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(d) On pose $Y = P'^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Remarquons que :

$$X'' = MX \iff X'' = P'D'P'^{-1}X \iff P'^{-1}X'' = D'P'^{-1}X \iff Y'' = D'Y$$

Il reste à résoudre ce dernier système, qui peut s'écrire très simplement :

$$\begin{cases} y_1'' = -2\omega_0^2 y_1 & (1) \\ y_2'' = (\sqrt{2}-2)\omega_0^2 y_2 & (2) \\ y_3'' = -(\sqrt{2}+2)\omega_0^2 y_3 & (3) \end{cases}$$

L'équation (1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, d'équation caractéristique associée $r^2 = -2\omega_0^2 = \left(i\sqrt{2}\omega_0\right)^2$, de solutions $r = \pm i\sqrt{2}\omega_0$, d'où :

$$\exists \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \quad y_1 = \alpha_1 \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + \beta_1 \sin(\sqrt{2}\omega_0 t)$$

La vitesse initiale étant nulle, on peut écrire $X'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $Y'(0) = P'^{-1}X'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que $\beta_1 = 0$ et :

$$\exists \alpha_1 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \quad y_1(t) = \alpha_1 \cos(\sqrt{2}\omega_0 t)$$

De la même manière :

$$\exists \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \quad y_2(t) = \alpha_2 \cos(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega_0 t)$$

$$\exists \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \quad y_3(t) = \alpha_3 \cos(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0 t)$$

Comme $X = PY$, on conclut :

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \text{ tels que : } X(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + \alpha_2 \cos(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega_0 t) + \alpha_3 \cos(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0) t \\ \sqrt{2}\alpha_2 \cos(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega_0 t) - \sqrt{2}\alpha_3 \cos(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0 t) \\ -\alpha_1 \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + \alpha_2 \cos(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega_0 t) + \alpha_3 \cos(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

Enfin, puisque $X(0) = \begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ x_{3m} \end{pmatrix}$, on a le système :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= x_{1m} \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= x_{2m}/\sqrt{2} \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= x_{3m} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= x_{1m} \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} x_{2m} \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= \dfrac{1}{2}(x_{1m} + x_{3m}) \quad (L_1 + L_3)/2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= x_{1m} \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} x_{2m} \\ \alpha_2 &= \dfrac{1}{4}(x_{1m} + \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}) \quad (L_2 + L_3)/2) \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= x_{1m} \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= x_{2m}/\sqrt{2} \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= x_{3m} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 &= \dfrac{1}{2}(x_{1m} - x_{3m}) \\ \alpha_2 &= \dfrac{1}{4}(x_{1m} + \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}) \\ \alpha_3 &= \dfrac{1}{4}(x_{1m} - \sqrt{2}x_{2m} + x_{3m}) \end{cases}$$

En résumé :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & \dfrac{x_{1m}-x_{3m}}{2}\cos(r_1t)+\dfrac{x_{1m}+\sqrt{2}x_{2m}+x_{3m}}{4}\cos(r_2t)+\dfrac{x_{1m}-\sqrt{2}x_{2m}+x_{3m}}{4}\cos(r_3)t \\ x_2(t) & = & \sqrt{2}\dfrac{x_{1m}+\sqrt{2}x_{2m}+x_{3m}}{4}\cos(r_2t)-\sqrt{2}\dfrac{x_{1m}-\sqrt{2}x_{2m}+x_{3m}}{4}\cos(r_3t) \\ x_3(t) & = & -\dfrac{x_{1m}-x_{3m}}{2}\cos(r_1t)+\dfrac{x_{1m}+\sqrt{2}x_{2m}+x_{3m}}{4}\cos(r_2t)+\dfrac{x_{1m}-\sqrt{2}x_{2m}+x_{3m}}{4}\cos(r_3t)\end{array}\right.}$$

avec $r_1=\sqrt{2}\omega_0$, $r_2=\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega_0$ et $r_3=\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Partie I. Étude d'exemples.

I.A. On considère dans cette section I.A. que $E=\mathbb{R}^2$.

Soit α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est la matrice $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

I.A.1. On choisit $a=(2,3)$. On a $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-1\end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{\alpha(a)=(-10,-1)}$$

Il est clair que $(a,\alpha(a))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$, donc une base de $\mathbb{R}^2$, ce qui prouve le résultat :
$\boxed{\text{L'endomorphisme } \alpha \text{ est cyclique.}}$

I.A.2. On calcule $A\begin{pmatrix}-10\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-34\\-9\end{pmatrix}$, d'où

$$\boxed{\alpha^2(a)=(-34,-9)}$$

et on cherche x et y tels que :

$$\begin{pmatrix}-36\\-9\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-10\\-1\end{pmatrix}$$

ce qui donne un système à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcl}2x-10y & = & -34\\ 3x-y & = & -9\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll}-28x & = & 56 & (L_1-10L_2)\\ -28y & = & -84 & (3L_1-2L_2)\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2\\ y & = & 3\end{array}\right.$$

$$\boxed{\alpha^2(a)=-2a+3\alpha(a)}$$

I.A.3. D'après la question précédente la matrice A' de α dans la base $\big(a,\alpha(a)\big)$ est :

$$\boxed{A'=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}}$$

I.A.4. $\chi_{A'}(x)=\begin{vmatrix} x & 2\\ -1 & x-3\end{vmatrix}=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. D'où :

$$\boxed{2 \text{ est une valeur propre de } \alpha \text{ (et 1 aussi).}}$$

I.A.5. Un vecteur b non nul de $\mathbb{R}^2$, tel que $\big(b,\alpha(b)\big)$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$ est nécessairement un vecteur propre. Cherchons donc un vecteur propre associé à la valeur propre 2 :

$$(A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl}2x-6y & = & 0\\ x-3y & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff x=3y$$

On peut donc prendre $b=(3,1)$:

$$\boxed{\text{Si } b=(3,1), \text{ alors } \big(b,\alpha(b)\big) \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^2.}$$

I.B. On considère dans cette section I.B. que $E=\mathbb{R}^3$. Soit β l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

I.B.1. Le polynôme caractéristique de β est donné par le calcul :

$$\chi_B(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 0 & x-4 & 6 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix}=(x-2)\chi_A(x)=(x-2)^2(x-1)$$

$$\boxed{\chi_\beta(x)=(x-2)^2(x-1)}$$

I.B.2. On constate que 0 n'est pas valeur propre, donc $\det \beta \neq 0$, d'où :

$$\boxed{\beta \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$$

I.B.3. On cherche d'abord E_2 :

$$\begin{aligned}(B-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2y-6z &=& 0 \\ y-3z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff y=3z\end{aligned}$$

$$\boxed{\{(1,0,0),(0,3,1)\} \text{ est une base de } E_2}$$

puis de E_1 :

$$\begin{aligned}(B-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x=0 && \\ 3y-6z &=& 0 \\ y-2z &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 2z \end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\boxed{\{(0,2,1)\} \text{ est une base de } E_1}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres égale la dimension de $\mathbb{R}^3$, donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\beta \text{ est diagonalisable, et a pour matrice dans la base } \{(1,0,0),(0,3,1),(0,2,1)\} \\ D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array}}$$

I.B.4. On a clairement $D^2-3D+2I=0$, d'où :

$$\boxed{\beta^2-3\beta+2\,\mathrm{Id}=0}$$

I.B.5. Pour tout $a\in\mathbb{R}^3$, la famille $(a,\beta(a),\beta^2(a))$ est liée car :

$$\beta^2(a)-3\beta(a)+2a=0$$

Par définition, on a prouvé que :

$$\boxed{\beta \text{ n'est pas cyclique.}}$$

I.C. I.C.1. Il est clair que $\gamma(X^{n-1})=(n-1)X^{n-2}$.

Montrons par récurrence que $\gamma^k(X^{n-1})=(n-1)(n-2)\dots(n-k)X^{n-k-1}$:
- C'est vrai pour $k=1$ comme on vient de le voir.
- Soit $k\in\mathbb{N}$ fixé, $1\leqslant k\leqslant n-1$. On suppose $\gamma^k(X^{n-1})=(n-1)(n-2)\dots(n-k)X^{n-k-1}$:

$$\begin{aligned}\gamma^{k+1}(X^{n-1}) &= \gamma\big(\gamma^k(X^{n-1})\big)=(n-1)(n-2)\dots(n-k)\gamma\big(X^{n-k-1}\big) \\ &= (n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-k-1)X^{n-k-2}\end{aligned}$$

La relation est donc vraie au rang $k+1$.

Par récurrence, on vient de prouver le résultat suivant :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!]\,,\ \ \gamma^k(X^{n-1}) = (n-1)(n-2)\dots(n-k)X^{n-k-1}}$$

I.C.2. La famille $\big(X^{n-1}, \gamma(X^{n-1}), \dots, \gamma^{n-1}(X^{n-1})\big)$ est une famille échelonnée en degrés de polynômes non nuls. Elle comporte $n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vecteurs, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\gamma \text{ est cyclique.}}$$

Partie II

On considère l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe le polynôme Q défini par : $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

II.A. Dans cette question, on montre que δ est cyclique.

II.A.1. Soit k un entier naturel compris au sens large entre 1 et $n-1$.

En utilisant la formule du binôme, on obtient :

$$\delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

Il est immédiat de constater que :

$$\boxed{\text{Le polynôme } \delta\big(X^k\big) \text{ est exactement de degré } k-1.}$$

II.A.2. Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. On pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $p = \deg P \leqslant n-1$ (donc $a_p \neq 0$). Par linéarité de δ :

$$\delta(P) = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta(X^k)$$

Or le polynôme $\delta(X^k)$ est exactement de degré $k-1$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$, donc la somme est de même degré que $\delta(X^p)$, c'est à dire :

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \ \deg\big(\delta(P)\big) = \deg(P) - 1}$$

II.A.3. La famille $\Big(X^{n-1}, \delta\big(X^{n-1}\big), \delta^2\big(X^{n-1}\big), \cdots, \delta^{n-1}\big(X^{n-1}\big)\Big)$. est une famille de n polynômes non nuls de degrés étagés, donc libre. Comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\delta \text{ est cyclique}}$$

II.B. Dans cette question, on détermine le noyau et l'image de l'endomorphisme δ.

II.B.1. Il est clair que si P est un polynôme constant, son image est le polynôme nul. Réciproquement, si P n'est pas un polynôme constant, alors l'image de P n'est pas le polynôme nul d'après II.A.2. D'où

$$\boxed{\operatorname{Ker}\delta = \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}}$$

II.B.2. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors, d'après II.A.2, $\deg\big(\delta(P)\big) \leqslant n-2$, ainsi :

$$\boxed{\text{L'image de l'endomorphisme } \delta \text{ est contenue dans l'espace vectoriel } \mathbb{R}_{n-2}[X].}$$

II.B.3. D'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\operatorname{Im}(\delta)\big) = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] - \dim\big(\operatorname{Ker}\delta\big) = n-1 = \dim(\mathbb{R}_{n-2}[X])$$

et comme on a prouvé que $\operatorname{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$, les deux sous-espaces vectoriels sont égaux :

$$\boxed{\operatorname{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-2}[X]}$$

II.C. Dans cette question, on introduit une famille de polynômes $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, qui va permettre de démontrer d'une autre manière que δ est cyclique. On définit les polynômes $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ en posant :

$$P_0(X) = 1 \quad , \quad P_1(X) = \frac{1}{1!}X \quad , \quad P_2(X) = \frac{1}{2!}X(X-1), \dots$$

$$P_{n-1}(X)=\frac{1}{(n-1)!}X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+2).$$

On a donc, pour tout entier j compris au sens large entre 1 et $n-1$,

$$P_j(X)=\frac{1}{j!}X(X-1)(X-2)\cdots(X-j+1)=\frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(X-k).$$

II.C.1. $\left(P_0,P_1,P_2,\ldots,P_{n-1}\right)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés, donc libre. De plus elle compte $n=\dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$ éléments, d'où :

$$\boxed{\left(P_0,P_1,P_2,\ldots,P_{n-1}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

II.C.2. On pose $P=X^3-5X^2+X-3$. Déterminons quatre réels a,b,c et$d$ tels que :

$$P=\lambda_0P_0+\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3=\lambda_0+\lambda_1X+\lambda_2\frac{X(X-1)}{2}+\lambda_3\frac{X(X-1)(X-2)}{6}$$

En évaluant cette égalité successivement en $0,1,2$ et 3, on trouve le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda_0 & = & -3\\ \lambda_0+\lambda_1 & = & -6\\ \lambda_0+2\lambda_1+\lambda_2 & = & -13\\ \lambda_0+3\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3 & = & -18\end{array}\right.$$

que l'on résout facilement et nous permet d'obtenir $\lambda_0=\lambda_1=-3$, $\lambda_3=-4$ et $\lambda_3=6$

$$\boxed{X^3-5X^2+X-3=-3P_0-3P_1-4P_2+6P_3}$$

II.C.3. Soient i et j deux entiers naturels, tels que : $i\neq 0$ et $1\leqslant j\leqslant n-1$. On fait le calcul :

$$\begin{aligned}\delta\left(P_j\right) &= P_j(X+1)-P_j(X)\\ &= \frac{1}{j!}(X+1)X(X-1)\cdots(X-j+2)-\frac{1}{j!}X(X-1)(X-2)\cdots(X-j+1)\\ &= \frac{1}{j!}X(X-1)\cdots(X-j+2)\Big[X+1-(X-j+1)\Big]\\ &= \frac{1}{(j-1)!}X(X-1)\cdots(X-j+2)=P_{j-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta\left(P_j\right)=P_{j-1}}$$

En réitérant l'opération, on a :

$$\boxed{\delta^i\left(P_j\right)=P_{j-i} \text{ pour } i\leqslant j, \text{ et } \delta^i\left(P_j\right)=0 \text{ pour } i>j}$$

II.C.4. En particulier :

$$\left(P_{n-1},\delta(P_{n-1}),\ldots,\delta^{n-1}(P_{n-1})\right)=(P_{n-1},P_{n-2},\ldots,P_0)$$

est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après II.C.1, ce qui prouve que :

$$\boxed{\delta \text{ est cyclique.}}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

PARTIE I : Étude de la matrice A.

1. On a immédiatement :

$$\boxed{A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}}$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$aI + bA + cA^2 = 0 \implies \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{cases} a+c & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{cases} \implies a = b = c = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre.}}$$

3. (a) Par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L - 1$, on obtient :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -x & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -2 & x \end{vmatrix} = x(x^2 - 2)$$

$$\boxed{\chi_A(x) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, ainsi :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

(b) Cherchons maintenant les sous-espaces propres de cette matrice :

$\star$ $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y & = & 0 \\ x+z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = & 0 \\ x & = & -z \end{cases}.$

Donc $E_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\star$ $(A - \sqrt{2}I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\sqrt{2}x + y & = & 0 \\ x - \sqrt{2}y + z & = & 0 \\ y - \sqrt{2}z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = & \sqrt{2}x \\ z & = & x \end{cases}.$

Donc $E_{\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\star$ $(A + \sqrt{2}I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y & = & 0 \\ x + \sqrt{2}y + z & = & 0 \\ y + \sqrt{2}z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = & -\sqrt{2}x \\ z & = & x \end{cases}.$

Donc $E_{-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

On conclut :

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. On a immédiatement $D^3 = 2D$ puis $A^3 = PD^3P^{-1} = P(2D)P^{-1} = 2(PDP^{-1}) = 2A$.

$$\boxed{A^3 = 2A}$$

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$.

5. On constate immédiatement que :

$$\mathcal{E} = \left\{aI + bA + cA^2 \ ; \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$$

Donc $\mathcal{E}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille (I, A, A^2). Celle-ci est libre d'après I.2, donc :

$$\boxed{(I, A, A^2) \text{ est une base de } \mathcal{E} \text{ et } \dim E = 3.}$$

6. Soit $M \in E$. Alors il existe des réels a, b, c tels que $M = aI + bA + cA^2$, et :

$$AM = A(aI + bA + cA^2) = aA + bA^2 + cA^3 = aA + bA^2 + 2cA = (a + 2c)A + bA^2 \in \mathcal{E}$$

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{E}, \quad AM \in \mathcal{E}}$$

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

7. Il est clair que f est une application linéaire, et d'après II.6, elle est à valeurs dans $\mathcal{E}$, donc :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de l'espace vectoriel } \mathcal{E}.}$$

8. On sait que $f(I) = A$, $f(A) = A^2$ et $f(A^2) = 2A$, et on en déduit :

$$\boxed{F = \mathcal{M}at_{(I,A,A^2)} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

9. (a) On a par le calcul : $F^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2F$, ainsi :

$$\boxed{f \circ f \circ f = 2f}$$

(b) Soit λ une valeur propre de f, de vecteur propre associé X, alors :

$$\begin{array}{rcl} f(X) & = & \lambda X \\ f \circ f(X) & = & f(f(X)) = f(\lambda X) = \lambda f(X) = \lambda^2 X \\ f \circ f \circ f(X) & = & f\big(f \circ f(X)\big) = f(\lambda^2 X) = \lambda^2 f(X) = \lambda^3 X \end{array}$$

Donc, comme $f \circ f \circ f(X) = 2f(X)$, on a : $\lambda^3 X = 2\lambda X$, et $\lambda^3 = 2\lambda$ (car $X \neq 0$).

$$\boxed{\text{Toute valeur propre } \lambda \text{ de } f \text{ vérifie : } \lambda^3 = 2\lambda.}$$

(c) $\lambda^3 = 2\lambda \iff \lambda(\lambda^2 - 2) = 0 \iff \lambda \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
Donc $\mathrm{Sp}\, f \subset \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Déterminons maintenant les sous-espaces propres associés.
On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$FX = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2z \\ y & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{Donc } E_0 : \mathrm{Vect}\,(-2, 0, 1).$$

$$(F - \sqrt{2}I)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\sqrt{2}x & = & 0 \\ x - \sqrt{2}y + 2z & = & 0 \\ y - \sqrt{2}z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \sqrt{2}z \end{array} \right. \quad \text{Donc } E_{\sqrt{2}} : \mathrm{Vect}\,(0, \sqrt{2}, 1).$$

$$(F + \sqrt{2}I)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{2}x & = & 0 \\ x + \sqrt{2}y + 2z & = & 0 \\ y + \sqrt{2}z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -\sqrt{2}z \end{array} \right. \quad \text{Donc } E_{-\sqrt{2}} : \mathrm{Vect}\,(0, -\sqrt{2}, 1).$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, f = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} E_0 & = & \mathrm{Vect}(-2I + A^2) \\ E_{\sqrt{2}} & = & \mathrm{Vect}(\sqrt{2}A + A^2) \\ E_{-\sqrt{2}} & = & \mathrm{Vect}(-\sqrt{2}A + A^2) \end{array} \right. .}$$

10. 0 est valeur propre, donc f n'est pas injectif. De plus, f a trois valeurs propres distinctes en dimension 3, donc f est diagonalisable.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ n'est pas bijectif, mais } f \text{ est diagonalisable.}}$$

11. On peut utiliser les calculs précédents. En effet, $\operatorname{Ker} f = E_0$.

$$\boxed{\text{Une base de } \operatorname{Ker} f \text{ est } (-2I + A^2).}$$

Pour $\operatorname{Im} f$, il suffit de prendre les images des éléments de la base canonique :

$$\boxed{\text{Une base de } \operatorname{Im} f \text{ est } (A, A^2).}$$

12. (a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$ revient à résoudre :

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{ccc} 0 & = & 1 \\ x+2z & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

L'équation n'a pas de solution :

$$\boxed{S = \emptyset}$$

(b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$ revient à résoudre :

$$\begin{aligned} F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad & \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{ccc} 0 & = & 0 \\ x+2z & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \\ & \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{ccc} 0 & = & 0 \\ x & = & 1-2z \\ y & = & 1 \end{array}\right. \\ & \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2z \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left\{I + A + \lambda(-2I + A^2),\ \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

On peut aussi remarquer que :

$$\boxed{S = \underbrace{\{I + A\}}_{\text{sol part}} + \underbrace{\operatorname{Ker} f}_{\text{sol de l'équ. homogène}}}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Exemples en petite taille.

(a) i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{Tr} A = 0$ et $\operatorname{rg} A = 1$.

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{Tr} A = 0$ et $\operatorname{rg} A = 2$.

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{Tr} A = 0$ et $\operatorname{rg} A = 3$.

(b) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont situées sur la diagonale. On observe donc que 0 est l'unique valeur propre de A. Si A était diagonalisable, A serait semblable à la matrice nulle, donc égale à celle-ci. Ainsi :

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

2. Existence d'un polynôme annulateur.

   Les colonnes d'une matrice de rang 1 sont toutes proportionnelles à une même colonne, ainsi les coefficients $m_{i,j}$ de la matrice M sont de la forme $\alpha_i\beta_j$ avec α_i et β_j des scalaires dans $\mathbb{K}$. On a aussi l'écriture :
$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_n\beta_1 & \cdots & \cdots & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$
$$\boxed{M = XY^T \quad \text{avec :} \quad X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}$$
   On en déduit que :
$$\begin{aligned} M^2 &= M \times M = (XY^T)(XY^T) = X(Y^TX)Y^T \\ &= X\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right)Y^T = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right)XY^T = \mathrm{Tr}(M)M \end{aligned}$$
$$\boxed{M^2 = \lambda M \quad \text{avec} \quad \lambda = \mathrm{Tr}(M).}$$

3. La trace est valeur propre.

   Dans la suite de l'exercice, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont M est la matrice dans la base de $\mathbb{K}^n$.

   (a) D'après l'égalité précédente :
$$0 = M^2 - \lambda M = M(M - \lambda I_n)$$
   Si $M - \lambda I_n$ est inversible alors, en multipliant à gauche par cet inverse, on obtient $M = 0$, ce qui n'est pas. Donc :
$$\boxed{\text{La matrice } M - \lambda I_n \text{ est non inversible.}}$$
   (b) D'après la question précédente, l'application $u - \lambda I$ n'est pas bijective, donc pas injective. On conclut :
$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } a \text{ non nul de } \mathbb{K}^n \text{ tel que } u(a) = \lambda a.}$$

4. Diagonalisation de M lorsque $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.

   On suppose que $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.

   (a) u est de rang 1, donc $\mathrm{Ker}\, u$ est de dimension $n-1$. Comme $\mathrm{Vect}\, a$ est de dimension 1, on a :
$$\dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim \mathrm{Vect}\{a\} = n = \dim \mathbb{K}^n$$
   Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Vect}\{a\}$. Alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $x = \mu a$, et de plus :
$$0 = u(x) = \mu u(a) = \mu\lambda a$$
   Comme $\lambda \neq 0$ et $a \neq 0$, on a nécessairement $\mu = 0$ et $x = 0$. Conclusion :
$$\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Vect}\{a\} = \{0\}$$
   Le résultat suivant est donc prouvé :
$$\boxed{\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Vect}\{a\}}$$
   (b) D'après la question précédente, on obtient une base de diagonalisation de u en concaténant une base de $\mathrm{Ker}\, u$ et une base de $\mathrm{Vect}\{a\}$:
$$\boxed{M \text{ est diagonalisable et semblable à } \mathrm{diag}(0, 0, \ldots, 0, \lambda).}$$
   En déduire que la matrice M est diagonalisable et préciser une matrice diagonale à laquelle elle est semblable.

5. On suppose que M est de trace nulle. D'après la question 2, on a $M^2 = 0$, donc M est nilpotente et 0 est l'unique valeur propre de u. En effet, si α est valeur propre de u de vecteur propre associé x, on a :
$$0 = u^2(x) = u(u(x)) = \alpha u(x) = \alpha^2 x$$
   donc $\alpha^2 = 0$ et $\alpha = 0$.

   On conclut de même qu'en 1b : si M est diagonalisable, alors M est semblable à la matrice nulle, donc égale à 0. Or ce n'est pas le cas $\mathrm{rg}\, M = 1$.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est de trace nulle, alors } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

6. **Application.** La matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est clairement de rang 1, et de trace non nulle (égale à n), donc d'après 4b :

$$\boxed{J \text{ est diagonalisable.}}$$

Il est clair que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de J associé à la valeur propre n. De plus, $\operatorname{Ker} J$ est le plan d'équation :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

Une base de $\operatorname{Ker} J$ est ainsi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boxed{D = \operatorname{diag}(0, 0, \dots, 0, n) = P^{-1}JP \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Correction de l'exercice 17 ▲

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Cherchons le polynôme caractéristique de f :

$$\begin{aligned} \chi_f(x) &= \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-8 & -4 & 7 \\ 8 & x+4 & -8 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x-8 & -4 \\ 8 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-4 & -4 \\ 4-x & x+4 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 - C_2) \\ \chi_f(x) &= (x-1)\begin{vmatrix} x-4 & -4 \\ 0 & x \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_2 + L_1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_f(x) = x(x-1)(x-4) \quad \text{et}\, \operatorname{Sp}(f) = \{0, 1, 4\}}$$

Le polynôme χ_f est scindé et à racines simples, donc :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable.}}$$

2) Cherchons les sous-espaces propres de f :

⋆ $E_0 = \operatorname{Ker} f$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 8x + 4y - 7z &=& 0 \\ -8x - 4y + 8z &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ z = 0 \end{array} \right.$$

On peut donc choisir $v_1 = (1, -2, 0)$.

⋆ $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$:

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 7x+4y-7z &=& 0 \\ -8x-5y+8z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 7x+4y-7z & = & 0 \\ -x+z=0 & & (5L_1+4L_2) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=0 \end{array}\right.$$

On peut donc choisir $v_2 = (1, 0, 1)$.

⋆ $E_4 = \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id})$:

$$(A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4x+4y-7z &=& 0 \\ -8x-8y+8z &=& 0 \\ -3z &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ y=-x \end{array}\right.$$

On peut donc choisir $v_3 = (1, -1, 0)$.

La base (v_1, v_2, v_3) ainsi choisie est une base de vecteurs propres de f et de plus :

$$\boxed{D = \mathcal{M}at_{(v_1,v_2,v_3)} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

3) Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que $A^m = PD^mP^{-1}$:

⋆ C'est clairement vrai pour $m = 1$ par la formule du changement de base.

⋆ Si on suppose que le résultat est vrai au rang m, alors :

$$A^{m+1} = A \times A^m = PDP^{-1} \times PD^mP^{-1} = PD \times D^mP = PD^{m+1}P^{-1}$$

car $PP^{-1} = I$. Le résultat est bien vrai au rang $m + 1$.

Par récurrence, on a établi :

$$\boxed{A^m = PD^mP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

4) Le calcul de P^{-1} s'effectue en inversant le système suivant :

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z=x' \\ -2x-z=y' \\ y=z' \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z=x' \\ -x+y=x'+y' \quad (L_1+L_2) \\ y=z' \end{array}\right.$$
$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l} x=y-x'-y'=-x'-y'+z' \\ y=z' \\ z=x'-x-y=2x'+y'-2z' \end{array}\right.$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

D'après la question 4, la A^m matrice de f^m dans la base canonique est donnée par le calcul suivant :

$$A^m = PD^mP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0} = A^m = \begin{pmatrix} 2\times 4^m & 4^m & 1-2\times 4^m \\ -2\times 4^m & -4^m & 2\times 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

5) Soit $H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice qui commute avec D, alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = HD = DH = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients des matrices, on a $b = c = d = f = g = h = 0$, donc la matrice H est diagonale. Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec D. En résumé :

$$\boxed{\text{Les matrices de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ qui commutent avec la matrice } D \text{ sont les matrices diagonales.}}$$

6) Soit $H =$ vérifiant $H^2 = D$. Alors $DH = H^2H = H^3 = HH^2 = HD$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } H^2 = D \text{ alors } H \text{ et } D \text{ commutent.}}$$

7) D'après les questions 6 et 5, les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$ sont des matrices diagonales. En notant $H = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, on trouve :

$$H^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Par identification, on a $a = 0$, $b = \pm 1$ et $c = \pm 2$. D'où :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$$

Réciproquement, une matrice de cette forme vérifie clairement $H^2 = D$.
Les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $H^2 = D$ sont par conséquence les endomorphismes de matrice

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ce qui donne l'ensemble composé des 4 matrices suivantes :

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}}$$

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Remarquons que :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$$

Montrons que $J^m = 3^{m-1}J$ pour tout entier $m \geqslant 1$.

$\star$ C'est clair pour $n = 1$.

$\star$ Si c'est vrai au rang m, alors :

$$J^m = J \times J^{m-1} = J \times 3^{m-1} J = 3^{m-1} J^2 = 3^{m-1} \times 3J = 3^m J$$

Donc le résultat est vrai au rang m. Par récurrence, on a donc le résultat qui suit :

$$\boxed{J^m = 3^{m-1} J}$$

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que la matrice de f^m est A^m. Or $A = I + J$ et I et J commutent, ce qui autorise l'utilisation de la formule du binôme :

$$\begin{aligned}(I+J)^m &= \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} J^p I^{m-p} = \\ &= I + \sum_{p=1}^{m} \binom{m}{p} 3^{p-1} J = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 3^p - 1\right) J\end{aligned}$$

D'après la formule du binôme, on a aussi $\displaystyle\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 3^p = (3+1)^m = 4^m$ d'où

$$(I+J)^m = I + \frac{1}{3}(4^m - 1)J$$

c'est à dire :

$$\boxed{\text{Pour tout } m \in \mathbb{N}^*,\ f^m = \mathrm{Id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j.}$$

On constate très vite que cette relation est encore valable pour $m = 0$ (avec $f^0 = \mathrm{Id}$).

3) Calculons le polynôme caractéristique de f pour avoir les valeurs propres :

$$\begin{aligned}\chi_f(x) = \det(A - xI) &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 \\ x-4 & x-2 & -1 \\ x-4 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ \ L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ \chi_f(x) &= (x-4)(x-1)^2\end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ admet deux valeurs propres distinctes } \lambda = 1 \text{ d'ordre 2, et } \mu = 4}$$

4) Procédons par un raisonnement du type analyse-synthèse :

— Analyse : On suppose qu'il existe un couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q = p + 4^m q$, alors :

$$\left\{\begin{aligned} f^0 = p + q &= \mathrm{Id} \\ f = p + 4q &= \mathrm{Id} + j \end{aligned}\right.$$

Il vient alors $q = \dfrac{1}{3}j$ et $p = \mathrm{Id} - \dfrac{1}{3}j$ (ce qui assure l'unicité du couple en cas d'existence).

— Synthèse : Il reste à montrer réciproquement que ce couple convient. On vérifie que pour $m \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\lambda^m p + \mu^m q &= \left(\mathrm{Id} - \frac{1}{3}j\right) + \frac{4^m}{3} j \\ &= \mathrm{Id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j = f^m\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il existe un unique couple } (p, q) \text{ d'endomorphismes de } \mathbb{R}^3 \text{ tel que pour tout entier } m \geqslant 0,\ f^m = \lambda^m p + \mu^m q.}$$

Montrons que les endomorphismes p et q sont linéairement indépendants. Soient α et β tels que $\alpha p + \beta q = 0$. Matriciellement, on a alors :

$$0 = \frac{\alpha}{3}J + \beta I - \frac{\beta}{3}J = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+2\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} \\ \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha+2\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} \\ \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha-\beta}{3} & \frac{\alpha+2\beta}{3} \end{pmatrix}$$

Par identification $\alpha = \beta = -2\beta$ donc $\alpha = \beta = 0$.

5) Avec les valeurs de p et q trouvées précédemment, on peut calculer :

$$\begin{aligned} p^2 &= (\mathrm{Id} - j/3)^2 = \mathrm{Id} - 2j/3 + j^2/9 = \mathrm{Id} - 2j/3 + j/3 = \mathrm{Id} - j/3 = p \\ q^2 &= j^2/9 = j/3 = q \\ p \circ q = q \circ p &= j/3(\mathrm{Id} - j/3) = j/3 - j^2/9 = j/3 - j/3 = 0 \end{aligned}$$

En résumé :

$$\boxed{p^2 = p, \quad q^2 = q, \quad q \circ p = p \circ q = 0}$$

En particulier, les endomorphismes p et q sont des projecteurs.

On cherche maintenant $h = \alpha p + \beta q$ tel que $h^2 = f$, alors :

$$f = \lambda p + \mu q = (\alpha p + \beta q)^2 = \alpha^2 p^2 + \alpha\beta(p \circ q + q \circ p) + \beta^2 q^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$$

Comme la famille (p, q) est libre, cette condition est réalisée si et seulement si $\alpha^2 = \lambda = 1$ et $\beta^2 = \mu = 4$, i.e. $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm 2$.

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } h \text{ vérifiant } h^2 = f \text{ sont } p + 2q,\ p - 2q,\ -p + 2q,\ -p - 2q.}$$

6) Connaissant les valeurs propres, déterminons les sous-espaces propres de f :

⋆ $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$:

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0$$

Le sous-espace propre E_1 est donc un plan engendré par la famille $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$.

⋆ $E_4 = \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id})$:

$$(A - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y + z &=& 0 \\ x - 2y + z &=& 0 \\ x + y - 2z &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} -2x + y + z = 0 & \\ 3x - 3y = 0 & (L_2 - L_1) \\ 3x - 3z = 0 & (L_3 - L_1) \end{array} \right. \iff x = y = z$$

Le sous-espace propre E_4 est donc une droite engendré par $(1, 1, 1)$.

Il existe une base de vecteurs propres (χ_f est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre correspond à la dimension du sous-espace propre associé), donc :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

On peut aussi remarquer (voir le chapitre sur les espaces euclidiens) que A est symétrique réelle et appliquer le théorème spectral.

$$\boxed{(v_1, v_2, v_3) = ((1, -1, 0), (1, 0, -1), (-1, 1, 1)) \text{ est une base de vecteurs propres de } f.}$$

De plus :

$$\boxed{D = \mathcal{M}at_{(v_1,v_2,v_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

Avec $p = (4\,\mathrm{Id} - f)/3$ et $q = (f - \mathrm{Id})/3$, on trouve les matrices de p et q dans cette base :

$$\boxed{D_p = \mathcal{M}at_{(v_1,v_2,v_3)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D_h = \mathcal{M}at_{(v_1,v_2,v_3)}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

On vérifie en passant que sont bien des matrices de projecteurs dont le produit est nul.

7) Les matrices suivantes (non diagonales) vérifient $K^2 = I_2$ et $Y^2 = D$:

$$\boxed{K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

8) On considère l'endomorphisme h de matrice Y dans la base (v_1, v_2, v_3).
On a $Y^2 = D$ donc $h^2 = f$. D'autre part, h n'est pas combinaison linéaire de p et q car Y n'est pas diagonale donc pas combinaison linéaire de D_p et D_q.

$$\boxed{\text{Il existe un endomorphisme } h \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant } h^2 = f \text{ qui n'est pas combinaison linéaire de } p \text{ et } q.}$$

9) On suppose que $h^2 = f$. On note $H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice de h dans la base (v_1, v_2, v_3). De même qu'à la partie A, on prouve que H commute avec D et :

$$\begin{pmatrix} a & b & 4c \\ d & e & 4f \\ g & h & 4i \end{pmatrix} = HD = DH = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

On en déduit que $c = f = g = h = 0$ puis :

$$H = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

On remarque que $h(v_3) = iv_3$ et comme $h^2(v_3) = 4v_3 = i^2 v_3$, on a $h(v_3) = \pm 2v_3$.
De plus, $h(v_1)$ et $h(v_2)$ appartiennent au plan $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et comme $H^2 = D$, la restriction de h^2 à ce plan est l'identité. $h_{|F}$ est donc une symétrie. Or on a vu qu'une symétrie était diagonalisable (de valeurs propres 1 ou -1), donc il existe une base de vecteurs propres (v_1', v_2') de $h_{|F}$. La matrice de h dans la base (v_1', v_2', v_3) est diagonale. On conclut :

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } h \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ qui vérifient } h^2 = f \text{ sont diagonalisables.}}$$

Correction de l'exercice 18 ▲

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3 : $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère, pour tout réel a, la matrice carrée réelle d'ordre 3 :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. a) Calculons le polynôme caractéristique de J :

$$\begin{aligned} \chi_J(x) &= \begin{vmatrix} x & -2 & -1 \\ 0 & x+1 & -2 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & -3 & -1 \\ 0 & x-1 & -2 \\ 0 & x-1 & x \end{vmatrix} \quad (C_2 + C_3) \\ &= \begin{vmatrix} x & -3 & -1 \\ 0 & x-1 & -2 \\ 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix} \quad (L_3 - L_2) \end{aligned}$$

Donc $\chi_J(x) = x(x-1)(x+2)$:

$$\boxed{\text{Spec}(J) = \{0, 1, -2\}}$$

Il est clair que :

$$\boxed{E_0 = \text{Vect}\{(1, 0, 0)\}}$$

Cherchons E_1 :

$$(J-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+z & = & 0 \\ -2y+2z & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff y = z \text{ et } x = 3y$$

$$\boxed{E_1 = \text{Vect}\{(3,1,1)\}}$$

Cherchons E_{-2} :

$$(J-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+z & = & 0 \\ y+2z & = & 0 \\ y+2z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff y = -2z \text{ et } x = \frac{3}{2}z$$

$$\boxed{E_{-2} = \text{Vect}\{(3,-4,2)\}}$$

b) La question précédente montre que J est diagonalisable et que :

$$\boxed{J = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

c) Remarquons que $M_a = J + aI = PDP^{-1} + aPIP^{-1} = P(D+aI)P^{-1}$.

$$\boxed{M_a = PD_aP^{-1} \text{ avec } D_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.}$$

d) M_a est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de D_a, c'est à dire d'après la question précédente pour $a \neq 0$, $a \neq -1$ et $a \neq 2$:

$$\boxed{M_a \text{ est inversible si et seulement si } a \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,2\}.}$$

2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice X carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.

a) Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre 3 telle que $X^2 = M_a$.

(i) $XM_a = XX^2 = X^3 = X^2X = M_aX$.

$$\boxed{X \text{ commute avec } M_a.}$$

Remarquons que $J = M_a - aI$, ainsi :

$$XJ = X(M_a - aI) = XM_a - aX = M_aX - aX = (M_a - I)X$$

$$\boxed{X \text{ commute avec } J.}$$

(ii) On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
D'après la question précédente, les endomorphismes f et h commutent. Soit x un vecteur propre de f, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

$$f(h(x)) = h(f(x)) = h(\lambda x) = \lambda h(x)$$

Ce calcul prouve que $h(x)$ appartient au sous-espace propre E_λ. Or on sait que celui-ci est de dimension 1 d'après 1a, donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \mu x$. Autrement dit, x est un vecteur propre de h.

$$\boxed{\text{Tout vecteur propre de } f \text{ est vecteur propre de } h.}$$

(iii) On sait, d'après 1a, que f a une base de vecteurs propres. Ces vecteurs propres sont des vecteurs propres de h d'après la question précédente donc il forment aussi d'une base de vecteurs propres de h. La matrice P diagonalise donc X, autrement dit :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice réelle diagonale } \Delta \text{ d'ordre 3 telle que } X = P\Delta P^{-1}.}$$

De plus, $M_a = X^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2P^{-1}$, donc $P\Delta^2P^{-1} = PD_aP^{-1}$, et en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, on a

$$\boxed{\Delta^2 = D_a}$$

(iv) Cette dernière relation prouve que les éléments diagonaux de D_a sont des carrés, c'est à dire qu'ils sont positifs ou nuls. Ceci n'est possible que si $a, 1+a$ et $-2+a$ sont positifs ou nuls. On en conclut que :

$$\boxed{a \geqslant 2}$$

b) Réciproquement, si $a \geqslant 2$, on peut poser :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+a} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a-2} \end{pmatrix}, \text{ et } X = P\Delta P^{-1}.$$

Il vient immédiatement :

$$X^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PD_a P^{-1} = M_a$$

$$\boxed{\text{Pour tout nombre réel } a \text{ supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle } X \text{ d'ordre 3 telle que } X^2 = M_a.}$$

c) On conclut :

$$\boxed{\text{L'ensemble des nombres réels } a \text{ tels qu'il existe une matrice } X \text{ carrée réelle d'ordre trois vérifiant } X^2 = M_a \text{ est } [2, +\infty[.}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Propriétés de A.

1a. Soit un réel $\lambda \neq 0$ et X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = \lambda X$. Alors

$$A^2 X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda^2 X$$

Donc comme $A^2 = 0$, on a $\lambda^2 X = 0$ et puisque $X \neq 0$:

$$\boxed{\lambda = 0}$$

Résumons : si $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, on a $\lambda = 0$, c'est à dire

$$\boxed{\mathrm{Spec}(A) \subset \{0\}}$$

1b. Comme $A^2 = 0$, on a $0 = \det(A^2) = (\det A)^2$ donc

$$\boxed{\det(A) = 0}$$

Autrement dit, $P_A(0) = \det A = 0$, ce qui prouve que 0 est valeur propre de A. Ainsi $\{0\} \subset \mathrm{Spec}(A)$, et avec le résultat de la question précédente :

$$\boxed{\mathrm{Spec}(A) = \{0\}}$$

1c. On suppose que A est diagonalisable. Comme 0 est la seule valeur propre de A, cela implique que A est semblable à la matrice nulle. Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$A = P0P^{-1} = 0$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé. On a donc montré par l'absurde que :

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

2a. $f^2 = f \circ f$ a pour matrice $A^2 = 0$ dans la base canonique, donc :

$$\boxed{f^2 = 0}$$

Si de plus $y \in \mathrm{Im}\, f$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et $f(y) = f^2(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}\, f$. Il est ainsi prouvé que :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f}$$

2b. Le théorème du rang permet d'écrire :

$$p = \dim E = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$$

et d'après la question précédente $\dim(\operatorname{Ker}) f \geqslant \dim(\operatorname{Im} f)$, d'où $p \geqslant 2\dim(\operatorname{Im} f)$, soit :

$$\boxed{\operatorname{rg} f \leqslant \frac{p}{2}}$$

Pour $p = 3$, cette inégalité implique nécessairement que $\operatorname{rg} f \leqslant 1,5$, c'est à dire $\operatorname{rg} f = 0$ ou $\operatorname{rg} f = 1$. Or comme $A \neq 0$, on a $\operatorname{rg} f \neq 0$, donc :

$$\boxed{\text{Le rang de } A \text{ vaut nécessairement 1 pour } p = 3.}$$

2c. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\text{Si } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } M \neq 0 \text{ et } M^2 = 0.}$$

3. On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{\alpha A + \beta I \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\} = \operatorname{Vect}(A, I)$$

3a. Par définition, la famille (A, I) est une famille génératrice de F. Il reste à montrer qu'elle est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda I + \mu A = 0$. En multipliant à gauche par A, on a :

$$\lambda A + \mu A^2 = 0 = \lambda A$$

et comme $A \neq 0$, on a $\lambda = 0$ puis $\mu = 0$. La famille (A, I) est donc libre, il s'agit par conséquent d'une base de E. Conclusion :

$$\boxed{\dim E = 2}$$

3b. Soit $(M, N) \in F^2$. Il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :

$$M = \alpha A + \beta I \quad \text{et} \quad N = \gamma A + \delta I$$

D'où $MN = (\alpha A + \beta I)(\gamma A + \delta I) = \alpha\gamma A^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)A + \beta\delta I = (\alpha\delta + \gamma\beta)A + \beta\delta I \in F$.

$$\boxed{F \text{ est stable par produit.}}$$

3c. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \alpha A + \beta I \in F$. En utilisant la formule qui précède :

$$M^2 = 2\alpha\beta A + \beta^2 I = 2\beta(\alpha A + \beta I) - \beta^2 I$$

On retrouve donc :

$$\boxed{M^2 = 2\beta M - \beta^2 I}$$

3d. Pour $\beta \neq 0$, il vient que $M^2 - 2\beta M = -\beta^2 I = M(M - 2\beta I)$ et :

$$M\left(\frac{2}{\beta}I - \frac{1}{\beta^2}M\right) = I = \left(\frac{2}{\beta}I - \frac{1}{\beta^2}M\right)M$$

On en déduit, pour $\beta \neq 0$, que la matrice $M = \alpha A + \beta I$ est inversible et que

$$M^{-1} = \frac{2}{\beta}I - \frac{1}{\beta^2}M = \frac{2}{\beta}I - \frac{1}{\beta^2}(\alpha A + \beta I)$$

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{\beta}I - \frac{\alpha}{\beta^2}A \in F}$$

3e. On pose $B = A + I$. D'après la question précédente (avec $\alpha = \beta = 1$) :

$$\boxed{B \text{ est inversible et } B^{-1} = I - A.}$$

3f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A et I commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton dans le calcul suivant :

$$B^n = (A + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k = I + nA$$

On remarque que le résultat reste vrai pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\boxed{\forall n \in [\![-1,+\infty[\![, \text{ on a } B^n = I + nA.}$$

4. Application.

Soient a, b et c trois réels. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $w_0 = c$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 3v_n + 6w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n - v_n - 2w_n \end{array} \right.$$

On pose pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

4a. De manière immédiate, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \ X_{n+1} = BX_n \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

4b. Calculons le polynôme caractéristique de B :

$$\begin{array}{rcl} P_B(X) & = & \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 3 \\ 2 & 3-X & 6 \\ -1 & -1 & -2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1-X \\ 2 & 3-X & 6 \\ -1 & -1 & -2-X \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\ & = & (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 2 & 3-X & 4 \\ -1 & -1 & -1-X \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_3 - C_1) \end{array}$$

$P_B(X) = (1-X)(X^2 - 2X + 1) = (1-X)^3$, ce qui prouve que :

$$\boxed{B \text{ a une unique valeur propre } \lambda = 1.}$$

4c. On pose $A = B - I$.

$$A^2 = (B-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 = 0}$$

4d. Les conditions de la question 3 sont réunies, on sait que $B^n = I + nA$ d'où, après calcul :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B^n = \begin{pmatrix} n+1 & n & 3n \\ 2n & 2n+1 & 6n \\ -n & -n & -3n+1 \end{pmatrix}}$$

4e. Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \ X_n = B^n X_0$. En effet, c'est clairement vrai pour $n = 0$ et si, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose le résultat vrai alors :

$$X^{n+1} = BX_n = B \times B^n X_0 = B^{n+1} X_0$$

D'où $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & n & 3n \\ 2n & 2n+1 & 6n \\ -n & -n & -3n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et après calcul :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & (n+1)a + nb + 3nc \\ v_n & = & 2na + (2n+1)b + 6nc \\ w_n & = & -na - nb + (1-3n)c \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcccl} u_n & = & a & + & (a+b+3c)n \\ v_n & = & b & + & (2a+2b+6c)n \\ w_n & = & c & + & (-a-b-3c)n \end{array} \right.}$$

4f. D'après l'expression précédente, les trois suites sont constantes si et seulement si a, b et c vérifient le système

$$\begin{cases} a+b+3c & = & 0 \\ 2a+2b+6c & = & 0 \\ -a-b-3c & = & 0 \end{cases}$$

Les trois lignes du système étant liées, on conclut :

$$\boxed{(u_n), (v_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont constantes si et seulement si } a+b+3c=0.}$$

4g. Si cette condition est vérifiée alors :

$$BX_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+(a+b+3c) \\ b+(2a+2b+6c) \\ c+(-a-b-3c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = X_0$$

Donc $BX_0 = X_0$ et on conclut :

$$\boxed{\text{Lorsque } a+b+3c=0, \text{ le vecteur } X_0 \text{ est vecteur propre de la matrice } B.}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

1. (a) On suppose que les trois premières composantes de V sont nulles. Un simple calcul donne :

$$LV = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h \\ h \\ h \end{bmatrix}$$

Si le produit LV est nul, alors $h = 0$, et le vecteur V est nul, ainsi : $\boxed{\text{Il n'y a pas dans } \operatorname{Ker} f \text{ de vecteur non nul dont les} \ldots \text{ sont nulles.}}$

(b) Procédons par équivalences en utilisant les propriétés des applications linéaires en dimension finie :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ker} f \text{ n'est pas réduit au vecteur nul} & \Leftrightarrow & f \text{ n'est pas injective} \\ & \Leftrightarrow & f \text{ n'est pas bijective} \\ & \Leftrightarrow & L \text{ n'est pas inversible} \\ \operatorname{Ker} f \text{ n'est pas réduit au vecteur nul} & \Leftrightarrow & \det L = 0 \end{array}$$

Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ n'est pas réduit au vecteur nul si et seulement si } \det L = 0}$$

(c) On suppose que V est non nul et appartient à $\operatorname{Ker} f$. On a donc :

$$LV = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ux_1+vy_1+wz_1+h \\ ux_2+vy_2+wz_2+h \\ ux_3+vy_3+wz_3+h \\ ux_4+vy_4+wz_4+h \end{bmatrix}$$

On observe que les coordonnées des points M_1, M_2, M_3 et M_4 vérifient l'équation suivante :

$$ux+vy+wz+h=0$$

Par ailleurs comme V est non nul et dans $\operatorname{Ker} f$, la question 1a prouve que $(u,v,w) \neq (0,0,0)$. Il s'agit donc de l'équation d'un plan de l'espace. En résumé :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } V \text{ est non nul et appartient à } \operatorname{Ker} f, \text{ alors :} \\ \qquad\qquad ux+vy+wz+h=0 \\ \text{est l'équation d'un plan contenant } M_1, M_2, M_3 \text{ et } M_4. \end{array}}$$

(d) Si le déterminant de L est nul, on sait d'après la question 1b que $\operatorname{Ker} f$ contient un vecteur non nul, et la question précédente prouve que M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires.

Réciproquement, si M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires, il existe un plan d'équation $ux + vy + wz + h = 0$, avec $(u, v, w) \neq 0$, qui contient ces points. Les coordonnées de M_1, M_2, M_3 et M_4 vérifiant l'équation du plan, le calcul :

$$LV = \begin{bmatrix} ux_1 + vy_1 + wz_1 + h \\ ux_2 + vy_2 + wz_2 + h \\ ux_3 + vy_3 + wz_3 + h \\ ux_4 + vy_4 + wz_4 + h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

montre que le vecteur de coordonnées (u, v, w, h) est dans $\operatorname{Ker} f$, et comme il est non nul on a $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. Donc $\det L = 0$. Il est ainsi prouvé que :

$$\boxed{M_1, M_2, M_3 \text{ et } M_4 \text{ sont coplanaires si et seulement si le déterminant de } L \text{ est nul.}}$$

2. (a) On suppose que le rang de S est inférieur ou égal à 2.

Remarquons que les trois lignes de S sont les trois premières lignes de L. Comme $\operatorname{rg} S \leqslant 2$, ces trois lignes sont liées, et donc les trois premières lignes de L sont liées. Ainsi $\operatorname{rg} L \leqslant 3$, et :

$$\boxed{\det L = 0}$$

D'après la question précédente, les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires, et ce quel que soit le point M_4, ce qui n'est possible que si :

$$\boxed{M_1, M_2 \text{ et } M_3 \text{ sont alignés}}$$

(b) On a vu que si le rang de S est inférieur ou égal à 2 alors M_1, M_2, M_3 sont alignés. Il reste à prouver la réciproque :

On suppose que M_1, M_2 et M_3 sont alignés. Alors :

$$\operatorname{rg} S = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que les deux dernières lignes sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$, qui sont liés. Donc $\operatorname{rg} S \leqslant 2$: l'équivalence est établie :

$$\boxed{\operatorname{rg} S \leqslant 2 \text{ si et seulement si } M_1, M_2 \text{ et } M_3 \text{ sont alignés.}}$$

3. On suppose que $M_1 \neq M_2$

(a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda V_1 + \mu V_2 = 0$. Alors :

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda + \mu) = (0, 0, 0, 0)$$

On a par identification $\lambda = -\mu$ et :

$$\lambda(x_1 - x_2) = \lambda(y_1 - y_2) = \lambda(z_1 - z_2) = 0$$

ce qui entraîne que $\lambda = 0 = \mu$, car $M_1 \neq M_2$, c'est à dire $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$ ou $z_1 \neq z_2$.

(b) Procédons par équivalences :

$$\begin{aligned}
M_1, M_2, M_3 \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{M_1M_3} = \mu \overrightarrow{M_1M_2} \qquad (\text{ car } M_1 \neq M_2) \\
&\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\
& (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) = \mu(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\
&\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\
& (x_3, y_3, z_3) = \mu(x_2, y_2, z_2) + (1 - \mu)(x_1, y_1, z_1) \\
M_1, M_2, M_3 \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\
& (x_3, y_3, z_3, 1) = \mu(x_2, y_2, z_2, 1) + (1 - \mu)(x_1, y_1, z_1, 1)
\end{aligned}$$

Reformulons ce résultat :

$$\boxed{\begin{array}{l} M_1, M_2, M_3 \text{ sont alignés si et seulement si il existe } \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \qquad\qquad V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu) V_2 \end{array}}$$

4. On suppose ici que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont alignés et tous distincts.

   (a) Comme $M_1 \neq M_2$ et M_1, M_2, M_3 sont alignés, on sait d'après 3b que la troisième ligne de L est combinaison linéaire des deux premières. De même, comme $M_1 \neq M_2$ et M_1, M_2, M_4 sont alignés, la quatrième ligne de L est combinaison linéaire des deux premières. Ainsi :

   Les deux dernières lignes de la matrice L sont combinaisons linéaires des deux premières.

   (b) La question précédente prouve que le rang de L est inférieur ou égal à 2. Par ailleurs, comme $M_1 \neq M_2$, la question 3a montre que les deux premières lignes de L sont linéairement indépendantes, ce qui prouve que :

   $$\boxed{\operatorname{rg} L = 2}$$

   Par le théorème du rang : $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rg} f = 4 - \operatorname{rg} L = 2$.

   $$\boxed{\dim(\operatorname{Ker} f) = 2}$$

   (c) Le fait que $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$ prouve que 0 est valeur propre et que le sous-espace propre associé est de dimension 2. On sait en outre que la multiplicité de la valeur propre est au moins égale à la dimension du sous-espace propre associé. On en conclut que :

   0 est valeur propre, avec un ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2.

5. **Application :**

   On suppose M_1, M_2, M_3 et M_4 non coplanaires. Une droite Δ rencontre en quatre points M'_4, M'_3, M'_2 et M'_1, tous distincts, les quatre plans contenant respectivement les points (M_1, M_2, M_3), (M_1, M_2, M_4), (M_1, M_3, M_4) et (M_2, M_3, M_4).

   On note M''_1, M''_2, M''_3 et M''_4 les milieux des segments $[M_1M'_1]$, $[M_2M'_2]$, $[M_3M'_3]$ et $[M_4M'_4]$. On se propose de démontrer que M''_1, M''_2, M''_3 et M''_4 sont coplanaires.

   Pour cela, on utilise encore la matrice L construite à l'aide des coordonnées de (M_1, M_2, M_3, M_4) et aussi les matrices L' et L'' construites de la même façon à l'aide des coordonnées de (M'_1, M'_2, M'_3, M'_4) et de $(M''_1, M''_2, M''_3, M''_4)$.

   (a) Constatons tout d'abord que les vecteurs V_1, V_2, V_3 et V_4 sont linéairement indépendants. En effet, les points M_1, M_2, M_3 et M_4 ne sont pas coplanaires et la question 1d prouve que $\det L \neq 0$.

   De plus, les points M'_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires par construction, donc la matrice composée des vecteurs lignes V'_1, V_2, V_3 et V_4 n'est pas inversible toujours d'après la question 1d. Comme V_2, V_3 et V_4 sont linéairement indépendants, c'est le vecteur V'_1 qui est combinaison linéaire des autres vecteurs. Autrement dit, il existe des réels $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tels que :

   $$V'_1 = \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3 + \delta_1 V_4$$

   Il reste à observer, en considérant la quatrième coordonnée, que $1 = \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1$. On résume :

   Il existe des réels $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tels que :

   $$V'_1 = \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3 + \delta_1 V_4 \quad \text{avec} \quad \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 1$$

   (b) En réitérant le procédé, on obtient des réels $\alpha_2, \gamma_2, \delta_2$, $\alpha_3, \beta_3, \delta_3$ et $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ tels que :

   $$\begin{cases} V'_2 &= \alpha_2 V_1 + \gamma_2 V_3 + \delta_2 V_4 \\ V'_3 &= \alpha_3 V_1 + \beta_3 V_2 + \delta_3 V_4 \\ V'_4 &= \alpha_4 V_1 + \beta_4 V_2 + \gamma_4 V_3 \end{cases}$$

   avec $\alpha_2 + \gamma_2 + \delta_2 = \alpha_3 + \beta_3 + \delta_3 = \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 = 1$.

   Si on pose $T = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 0 \end{bmatrix}$, on vérifie facilement que :

   T est une matrice carrée de taille 4 vérifiant :

   $$\begin{cases} \text{Les termes diagonaux sont nuls} \\ \text{Sur chaque ligne, la somme des termes vaut 1} \\ L' = T.L \end{cases}$$

(c) Un simple calcul montre que :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1+\gamma_1+\delta_1 \\ \alpha_2+\gamma_2+\delta_2 \\ \alpha_3+\beta_3+\delta_3 \\ \alpha_4+\beta_4+\gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On en conclut que :

$\boxed{\text{Le vecteur colonne de composantes } (1,1,1,1) \text{ est vecteur propre de } T \text{ associé à la valeur propre } 1.}$

(d) On a vu à la question 5a que $\det L \neq 0$, ainsi :

$$\boxed{L \text{ est inversible.}}$$

La relation $L' = TL$ et le fait que L est inversible prouvent que L' et T sont de même rang. Par définition, les quatre points M_4', M_3', M_2' et M_1' sont tous distincts et alignés, donc d'après la question 4b le rang de L' est égal à 2. Il vient :

$$\boxed{L' \text{ et } T \text{ sont de rang } 2.}$$

(e) On a constaté que 1 est valeur propre de T. On sait de plus que, puisque $\operatorname{rg} T = 2$, on a $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$ et 0 est valeur propre de multiplicité au moins égale à 2. On note λ la valeur propre restante. La trace de T étant la somme des valeurs propres, on a :

$$\lambda + 1 = 0 \quad \text{et donc : } \lambda = -1$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } T \text{ sont } 0 \text{ (double), } 1 \text{ et } -1.}$$

(f) Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, on sait que M_i'' est le milieu de $[M_i M_i']$. Donc en regardant les coordonnées, on a facilement :

$$(x_i'', y_i'', z_i'') = \left(\frac{x_i + x_i'}{2}, \frac{y_i + y_i'}{2}, \frac{z_i + z_i'}{2} \right)$$

ce qui entraîne $(x_i'', y_i'', z_i'', 1) = \frac{1}{2}(x_i, y_i, z_i, 1) + \frac{1}{2}(x_i', y_i', z_i', 1)$. On a ainsi, en considérant les lignes de L' :

$$\boxed{L'' = (L + L')/2}$$

avec la relation $L' = TL$ cette expression devient :

$$L'' = (I + T)L/2$$

-1 est valeur propre de T, donc $I + T$ n'est pas inversible, et on peut affirmer que :

$$\boxed{L'' \text{ n'est pas inversible.}}$$

(g) Puisque L'' n'est pas inversible, la question 1d permet de donner la conclusion :

$$\boxed{\text{Les points } M_1'', M_2'', M_3'' \text{ et } M_4'' \text{ sont coplanaires.}}$$

Correction de l'exercice 21 ▲

1. (a) On a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 3u_n - v_n + w_n \\ u_n + 2w_n \\ u_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Donc pour tout entier naturel n, on a $X_{n+1} = AX_n$ avec :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) On peut prouver alors que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$. En effet, le résultat est clairement vrai pour $n = 0$, et si on suppose qu'il est vrai au rang n pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors :

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0 \quad \text{avec l'hypothèse de récurrence.}$$

On en déduit donc par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0}$$

2. (a) Calculons le polynôme caractéristique de A par opérations sur les lignes et les colonnes :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 0 \\ 1 & 2-X & 2-X \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 + C_2) \\ &= (2-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 0 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\ P_A(X) &= (2-X)\big[((3-X)(1-X)+1\big] = (2-X)(X^2+4X+4) \end{aligned}$$

Ainsi $P_A(X) = (2-X)^3$ ce qui permet de conclure :

$$\boxed{2 \text{ est l'unique valeur propre de } A.}$$

(b) Déterminons le sous-espace propre E_2 de A associé à l'unique valeur propre.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in E_2 &\Leftrightarrow (A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - y + z &=& 0 \\ x &=& 0 \\ y - z &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = z \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est } E_2 = \mathrm{Vect}\big((0,1,1)\big)}$$

Comme le sous-espace propre E_2 est de dimension 1 strictement inférieure à la multiplicité 3 de la valeur propre associée, on en déduit :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est à dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Le choix de la base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ se fait comme suit :

⋆ On choisit $e'_1 = (0,1,1)$.

⋆ On choisit $e'_2 = (\alpha, \beta, -1)$ avec la contrainte $f(e'_2) = e'_1 + 2e'_2$, c'est à dire matriciellement :

$$A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha - \beta - 1 \\ \alpha + 2\beta \\ \beta - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 1 + 2\beta \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il est immédiat que cette égalité équivaut à $\beta = 0$ et $\alpha = 1$, soit $e'_2 = (1, 0, -1)$.

⋆ Il reste enfin à choisir $e'_3 = (\alpha, \beta, 2)$ avec la contrainte $f(e'_3) = e'_2 + 2e'_3$, c'est à dire matriciellement :

$$A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha - \beta + 2 \\ \alpha + 2\beta \\ \beta + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha \\ 2\beta \\ 3 \end{pmatrix}$$

Il est immédiat que cette égalité équivaut à $\beta = 1$ et $\alpha = 0$, soit $e'_3 = (0, 1, 2)$. On vérifie facilement (par exemple à l'aide du déterminant dans la base canonique) que la famille (e'_1, e'_2, e'_3) ainsi obtenue est libre. Il existe donc une base :

$$\boxed{\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = \big((0,1,1), (1,0,-1), (0,1,2)\big)}$$

telle que $T = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) On remarque que :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est à dire $T = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il est immédiat de constater que N et $2I$ commutent, donc on peut écrire la formule du binôme :

$$T^n = (N + 2I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k 2^{n-k} I$$

On peut simplifier cette expression en remarquant que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $k \geqslant 3$, $N^k = 0$:

$$T^n = 2^n I + n2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2$$

On a donc au final :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

4. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(a) On sait que $T = P^{-1}AP$, donc

$$\boxed{A = PTP^{-1}}$$

Montrons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A^n = PT^nP^{-1}$:

⋆ C'est vrai pour $n = 1$ comme on vient de le voir.

⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que $A^n = PT^nP^{-1}$. Alors :

$$A^{n+1} = A \times A^n = PTP^{-1} \times PT^nP^{-1} = PT \times T^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

⋆ Par récurrence, on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = PT^nP^{-1}}$$

(b) Le calcul de P^{-1} se fait comme suit :

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$L_1 \leftrightarrow L_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On a donc calculé :

$$\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}}$$

(c) Les questions précédentes nous permettent d'exprimer A^n :

$$\begin{aligned}
A^n &= PT^nP^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&n2^{n-1}&n(n-1)2^{n-3}\\0&2^n&n2^{n-1}\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0&2^n&n2^{n-1}\\2^n&n2^{n-1}&n(n-1)2^{n-3}+2^n\\2^n&n2^{n-1}-2^n&n(n-1)2^{n-3}-n2^{n-1}+2^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2^n+n2^{n-1}&-n2^{n-1}&n2^{n-1}\\n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-3}&2^n-n(n-1)2^{n-3}&n(n-1)2^{n-3}\\n(n-1)2^{n-3}&-n(n-1)2^{n-3}+n2^{n-1}&2^n+n(n-1)2^{n-3}-n2^{n-1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

puis :

$$X_n=A^nX_0=A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Soit, avec le calcul effectué ci-dessus :

$$X_n=\begin{pmatrix}(n+2)2^{n-1}\\n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-3}\\n(n-1)2^{n-3}\end{pmatrix}$$

On en déduit les expressions des suites $(u_n),(v_n)$ et (w_n) :

$$\boxed{u_n=(n+2)2^{n-1}\quad ;\quad v_n=n(n+3)2^{n-3}\quad ;\quad w_n=n(n-1)2^{n-3}}$$

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Les valeurs propres de la matrice A sont les racines réelles du polynôme caractéristique qu'on peut factoriser par les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix}1-X&1\\-2&4-X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-X&1\\2-X&4-X\end{vmatrix}\qquad (C_1\leftarrow C_1+C_2)\\
&= (2-X)\begin{vmatrix}1&1\\0&3-X\end{vmatrix}\qquad (L_2\leftarrow L_2-L_1)
\end{aligned}$$

On a donc $P_A(X)=(2-X)(3-X)$ et :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont 2 et 3.}}$$

2. Les valeurs propres de A étant simples, on peut trouver une base de vecteurs propres (e_1',e_2') avec $e_1'\in\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $e_2'\in\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$, et tout $u\in\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments de ces deux sous-espaces :

$$u=\lambda_1e_1'+\lambda_2e_2'$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{R}^2=\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})\oplus\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})}$$

3. On note $u=xe_1+ye_2$. Alors :

$$\begin{aligned}
u\in\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) &\Leftrightarrow (A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}-x+y&=&0\\-2x+2y&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})=\mathrm{Vect}(e_1+e_2)$. De la même façon :

$$\begin{aligned} e_1'\in\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) &\Leftrightarrow (A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}-2x+y&=&0\\-2x+y&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow y=2x\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})=\mathrm{Vect}(e_1+2e_2)$. On peut donc choisir :

$$\boxed{e_1'=e_1+e_2\in\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})\quad\text{et}\quad e_2'=e_1+2e_2\in\mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})}$$

4. La matrice D de f dans la base (e_1',e_2') est

$$\boxed{D=\mathcal{M}at_{(e_1',e_2')}(f)=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}}$$

5. Soit $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base (e_1,e_2) à la base (e_1',e_2'). On a par construction $D=P^{-1}AP$ et donc $A=PDP^{-1}$. Le calcul de P^{-1} se fait comme suit :

$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$L_2\leftarrow L_2-L_1$	$\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$L_1\leftarrow L_1-L_2$	$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

En résumé, on a :

$$\boxed{A=PDP^{-1}\text{ avec }P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\text{ et }P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}.}$$

6. On a de manière évidente $D^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$. Une récurrence montre alors que :

$$\begin{aligned} A^n=PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2^n&3^n\\2^n&2\times3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n&3^n-2^n\\2^{n+1}-2\times3^n&2\times3^n-2^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Soit en résumé :

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix}2^{n+1}-3^n&3^n-2^n\\2^{n+1}-2\times3^n&2\times3^n-2^n\end{pmatrix}}$$

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n et tout réel t, on note $E_n(t)$ la matrice définie par :

$$E_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}A^k$$

avec la convention $A^0=I_2$.

Cette matrice sera écrite sous la forme $E_n(t)=\begin{pmatrix}a_n(t)&b_n(t)\\c_n(t)&d_n(t)\end{pmatrix}$.

1. On sait que l'application qui à une matrice, associe un de ses coefficients, est linéaire donc :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} a_n(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1}-3^k)\frac{t^k}{k!} & ; & b_n(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(3^k-2^k)\frac{t^k}{k!}\\ c_n(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1}-2\times3^k)\frac{t^k}{k!} & ; & d_n(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2\times3^k-2^k)\frac{t^k}{k!}\end{array}}$$

2. (a) Le développement en série entière de la fonction exponentielle est :

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

(b) On a donc en particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k t^k}{k!} = \mathrm{e}^{2t} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k t^k}{k!} = \mathrm{e}^{3t}$$

On en déduit, avec la question 1, que les suites $\big(a_n(t)\big)_{t\in\mathbb{N}}$, $\big(b_n(t)\big)_{t\in\mathbb{N}}$, $\big(c_n(t)\big)_{t\in\mathbb{N}}$ et $\big(d_n(t)\big)_{t\in\mathbb{N}}$ sont convergentes qu'on a :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} a(t) = 2\,\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t} & ; & b(t) = \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t} \\ c(t) = 2\,\mathrm{e}^{2t} - 2\,\mathrm{e}^{3t} & ; & d(t) = 2\,\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t} \end{array}}$$

Dans la suite, on note $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. On peut aussi exprimer $E(t)$ de la manière suivante :

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t} \\ 2\,\mathrm{e}^{2t} - 2\,\mathrm{e}^{3t} & 2\,\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{E(t) = \mathrm{e}^{2t}\, Q + \mathrm{e}^{3t}\, R \quad \text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

4. (a) On constate immédiatement que :

$$\boxed{Q + R = I_2 \quad (1) \quad \text{et} \quad 2Q + 3R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = A \quad (2)}$$

(b) On déduit de la question précédente que Q et R sont combinaisons linéaires des matrices A et I_2. Plus précisément :

$$Q = 3I_2 - A \quad 3(1) - (2) \quad \text{et} \quad R = A - 2I_2 \quad (2) - 2(1)$$

On a donc avec la question 3 : $E(t) = \mathrm{e}^{2t}(3I_2 - A) + \mathrm{e}^{3t}(A - 2I_2)$, soit en simplifiant :

$$\boxed{E(t) = \left(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t}\right)A + \left(3\,\mathrm{e}^{2t} - 2\,\mathrm{e}^{3t}\right)I_2}$$

5. Un calcul nous donne facilement :

$$\boxed{Q^2 = Q, \qquad R^2 = R, \qquad \text{et} \qquad QR = RQ = 0.}$$

6. En utilisant l'expression trouvée en 3 et le résultat précédent, on a pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} E(s)E(t) & = & (\mathrm{e}^{2t}\, Q + \mathrm{e}^{3t}\, R)(\mathrm{e}^{2s}\, Q + \mathrm{e}^{3s}\, R) \\ & = & \mathrm{e}^{2(s+t)}\, Q^2 + \mathrm{e}^{3(s+t)}\, R^2 + \mathrm{e}^{2s+3t}\, RQ + \mathrm{e}^{2t+3s}\, QR \\ & = & \mathrm{e}^{2(s+t)}\, Q + \mathrm{e}^{3(s+t)}\, R = E(s+t) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (s,t) \text{ de réels, } E(s)E(t) = E(s+t) = E(t)E(s).}$$

On a donc pour $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = E(-t)E(t)$$

et comme $E(0) = I_2$ d'après l'expression trouvée en 4b, on en déduit que :

$$\boxed{E(t) \text{ est inversible et } E(t)^{-1} = E(-t).}$$

7. Soient $s, t \in \mathbb{R}$ tel que $E(s) = E(t)$. Alors :
$$I_2 = E(s)E(t)^{-1} = E(s)E(-t) = E(s-t)$$
ce qui donne $a(s-t) = d(s-t) = 1$ et $b(s-t) = c(s-t) = 0$, en particulier :
$$b(s-t) = \mathrm{e}^{3(s-t)} - \mathrm{e}^{2(s-t)} = 0 \quad \text{soit} \quad \mathrm{e}^{3(s-t)} = \mathrm{e}^{2(s-t)}$$
et donc, par une division, on a $\mathrm{e}^{(s-t)} = 0$, c'est à dire $s - t = 0$ et $s = t$. On en déduit :
$$\boxed{\text{L'application } t \mapsto E(t) \text{ est injective.}}$$

Troisième partie

On considère le système (S) d'équations différentielles :
$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + y \\ y' & = & -2x + 4y \end{array} \right.$$
On appelle solution du système (S) tout couple (u, v) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel t, on ait
$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & u(t) + v(t) \\ v'(t) & = & -2u(t) + 4v(t) \end{array} \right.$$

1. Soit (u, v) une solution de (S) ; pour tout réel t, on pose
$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$
   (a) On effectue un calcul matriciel :
$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a(-t) & b(-t) \\ c(-t & d(-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} a(-t)u(t) + b(-t)v(t) \\ c(-t)u(t) + d(-t)v(t) \end{pmatrix} \end{array}$$
   On a donc :
$$\boxed{u_1(t) = a(-t)u(t) + b(-t)v(t) \quad \text{et} \quad v_1(t) = c(-t)u(t) + d(-t)v(t)}$$
   (b) Les fonctions $a, b, c, d, t \mapsto -t$ ainsi que u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par opérations u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
$$\begin{array}{rcl} u_1'(t) & = & -a'(-t)u(t) + a(-t)u'(t) - b'(-t)v(t) + b(t)v'(t) \\ & = & (3\,\mathrm{e}^{-3t} - 4\,\mathrm{e}^{-2t})u(t) + (2\,\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t})u'(t) + (-3\,\mathrm{e}^{-3t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t})v(t) \\ & & +(-\,\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t})v'(t) \end{array}$$
   C'est à dire, en substituant les expressions de u' et v' en fonction de u et v :
$$\begin{array}{rcl} u_1'(t) & = & (3\,\mathrm{e}^{-3t} - 4\,\mathrm{e}^{-2t})u(t) + (2\,\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t})(u(t) + v(t)) \\ & & +(-3\,\mathrm{e}^{-3t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t})v(t) + (-\,\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t})(-2u(t) + 4v(t)) \\ u_1'(t) & = & 0 \end{array}$$
   Un calcul semblable nous donne $v_1'(t) = 0$. Finalement :
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_1'(t) = v_1'(t) = 0}$$

2. Si (u, v) est une solution de (S), il existe donc un couple (α, β) de réels tels que, pour tout réel t, on ait $u_1(t) = \alpha$ et $v_1(t) = \beta$, ce qui matriciellement s'écrit :
$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$
   Et donc :
$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(-t)^{-1} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Réciproquement si (u,v) vérifie la condition ci-dessus, alors :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t)\alpha + b(t)\beta \\ c(t)\alpha + d(t)\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\,\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t})\alpha + (-\,\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t})\beta \\ (2\,\mathrm{e}^{2t} - 2\,\mathrm{e}^{3t})\alpha + (-\,\mathrm{e}^{2t} + 2\,\mathrm{e}^{3t})\alpha \end{pmatrix}$$

Soit en dérivant :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a'(t)\alpha + b'(t)\beta \\ c'(t)\alpha + d'(t)\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4\,\mathrm{e}^{2t} - 3\,\mathrm{e}^{3t})\alpha + (-2\,\mathrm{e}^{2t} + 3\,\mathrm{e}^{3t})\beta \\ (4\,\mathrm{e}^{2t} - 6\,\mathrm{e}^{3t})\alpha + (-2\,\mathrm{e}^{2t} + 6\,\mathrm{e}^{3t})\beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(t) + v(t) \\ -2u(t) + 4v(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc prouvé le résultat :

$$\boxed{(u,v) \text{ solution de } (S) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists!(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.}$$