Sujets : Séries de Fourier.

Énoncés des sujets :

Exercice 1

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $]-\pi, \pi[$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction g entre -3π et 3π.
2. Quelle est la parité de la fonction g ? Justifier votre réponse.
3. La série de Fourier de g est notée $Sg(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big)$.
   (a) Donner les coefficients b_n pour tout entier n strictement positif.
   (b) Calculer a_0 et a_1.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :
   $$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$
   (d) En déduire la valeur de a_n si n est impair et $n \neq 1$.
   (e) Montrer que si $n = 2p$ est un entier pair non nul, alors $a_{2p} = \dfrac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}$.
4. On s'intéresse maintenant à la convergence de la série de Fourier de g.
   (a) A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = Sg(t)$? Justifier précisément votre réponse.
   (b) Montrer que
   $$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos t = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} \cos(2pt)$$
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$.
5. (a) Appliquer l'identité de Parseval à la fonction g.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2}$.

Correction ▼ [sf1]

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

Partie I :

1. Exprimer $e^{in\pi}$ à l'aide d'une puissance de 1.
2. On pose, pour tout entier naturel p, $I_{p,n} = \displaystyle\int_0^\pi t^p e^{int}\, \mathrm{d}t$. Montrer que $I_{0,n} = \dfrac{-\big((-1)^n - 1\big)i}{n}$.
3. Montrer que $\forall (p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $I_{p,n} = \dfrac{i(-1)^{n+1}\pi^p}{n} + \dfrac{ip}{n} I_{p-1,n}$.
4. On définit les intégrales suivantes :
$$C_{1,n} = \int_0^\pi t\cos(nt)\,\mathrm{d}t \;,\; S_{1,n} = \int_0^\pi t\sin(nt)\,\mathrm{d}t \;,\; C_{2,n} = \int_0^\pi t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t \;,\; S_{2,n} = \int_0^\pi t^2\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

(a) Calculer $I_{1,n}$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ C_{1,n} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \quad \text{et} \quad S_{1,n} = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}.$$

(b) Calculer $I_{2,n}$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ C_{2,n} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad S_{2,n} = \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{n^3} - \frac{(-1)^n\pi^2}{n}.$$

Partie II : Soit f une fonction impaire, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]0,\pi[$ par : $f(t) = \pi t - t^2$.

5. Représenter la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
6. Déterminer la série de Fourier de f. Préciser la valeur des termes d'indice pair et des termes d'indice impair.
7. (a) Étudier la convergence de la série de Fourier et déterminer sa somme.

   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
8. (a) Énoncer la relation de Parseval.

   (b) Appliquer la relation de Parseval à la fonction f et en déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

   (c) Soit $T = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$. Trouver une expression de T de la forme $T = S + bT$. En déduire la valeur de T.

Correction ▼ [sf2]

Exercice 3

Partie I

Soit h un réel fixé, élément de l'intervalle $]0,\pi]$ et f la fonction paire et de période 2π vérifiant :

$$f(t) = \frac{1}{2h} \text{ si } t \in [0,h], \text{ et } f(t) = 0 \text{ si } t \in]h,\pi].$$

1. Représenter la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$ (on pourra prendre $h = 1$ pour la représentation).
2. Déterminer la série de Fourier de f et prouver qu'elle converge. On notera :

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big)$$

3. En déduire la valeur de $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{n}$.
4. Quelle est la valeur de $S_f(h)$? Justifier ce résultat. En déduire la valeur de $B = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nh)}{n}$.
5. Déterminer, en utilisant la formule de Parseval, la valeur $C = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nh)}{n^2}$.
6. En prenant une valeur bien choisie pour h, déduire des questions précédentes, les valeurs de :

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \qquad E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \qquad F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Partie II

h est maintenant un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction g est paire, de période 2π vérifiant :

$$g(t) = \frac{1}{2h}\left(1 - \frac{t}{2h}\right) \text{ si } t \in [0,2h], \text{ et } f(t) = 0 \text{ si } t \in]2h,\pi].$$

1. Représenter la fonction g sur $[-3\pi, 3\pi]$ (on pourra prendre $h = 1$ pour la représentation).
2. Déterminer la série de Fourier de g :

$$S_g(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)\big)$$

   et montrer qu'elle converge vers $g(t)$.
3. Calculer la valeur de $G = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(nh)}{n^4}$.
4. En prenant une valeur bien choisie pour h, déduire de la question précédente, les valeurs de :

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}, \qquad K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Correction ▼ [sf3]

Exercice 4

On considère la fonction paire, 2π-périodique définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \pi x + \alpha & \text{si } \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \end{cases}$$

où α est un réel que l'on va déterminer.

1. Pour quelle valeur de α la fonction f est-elle continue en $\dfrac{\pi}{2}$?

   Pour la suite de l'exercice, α prendra cette valeur, ainsi f est continue sur $[0, \pi]$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$, et donner $f'(x)$ pour $x \in]0, \pi[$. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
4. 4a. Que valent les coefficients $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

   4b. Montrer que f' est impaire. En déduire la valeur des coefficients $a_n(f')$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   4c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $a_n(f) = -\dfrac{1}{n} b_n(f')$.

   4d. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin(nx)\, \mathrm{d}x$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f') = \frac{4}{\pi n^2} \sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

   4e. En déduire les valeurs de $a_{2p}(f)$ et de $a_{2p+1}(f)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
   Calculer $a_0(f)$.
5. Étudier la convergence ponctuelle de la série de Fourier de f.
6. On pose $S = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$. Calculer S à l'aide de la série de Fourier.

Correction ▼ [sf4]

Exercice 5

Soit $a \in]0, 1[$ un paramètre. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = \cos(at)$$

1. Quelle est la parité de la fonction f ?
2. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ pour la valeur $a = 1/2$.

   Dans les questions suivantes, a est un réel quelconque de $]0, 1[$.

3. La série de Fourier de f est notée $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$.
   (a) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$. On rappelle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:
   $$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big).$$
   (b) Que valent les coefficients $b_n(f)$?
   (c) Déduire des questions précédentes $S_f(t)$.
4. (a) Étudier la convergence de la série de Fourier de f, en énonçant le théorème utilisé.
   (b) En déduire la valeur de l'expression :
   $$\frac{\sin(\pi a)}{\pi a} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a\sin(\pi a)}{n^2 - a^2}$$
5. Dans cette question, on considère le cas $a = 1/2$.
   (a) Appliquer l'identité de Parseval à f.
   (b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2-1}\right)^2$.

Correction ▼ [sf5]

Exercice 6

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \varphi(t) = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

1. Donner l'allure de la représentation graphique de φ sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. L'application φ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$? On justifiera brièvement les réponses.
3. Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n de φ. Préciser la convergence de la série de Fourier de φ.
4. Justifier la convergence et calculer les sommes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$

Correction ▼ [sf01]

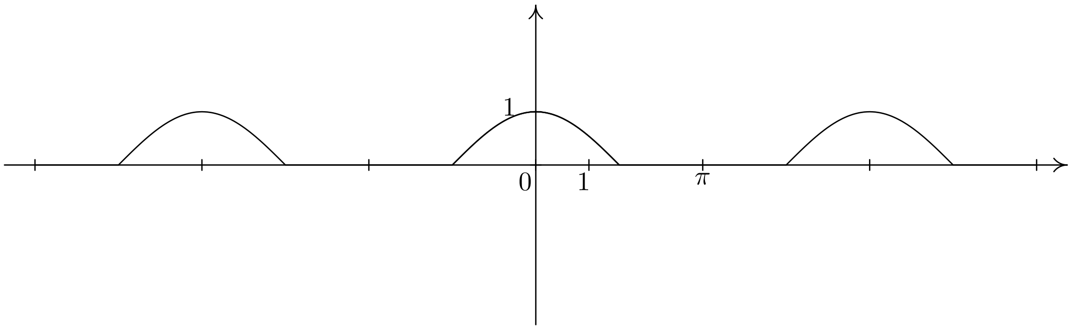
Corrigés des sujets :

Correction de l'exercice 1 ▲

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $]-\pi, \pi[$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

1. Graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$:



2. Pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $f(-t) = \cos(-t) = \cos t = f(t)$.
   Pour $t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$: $f(-t) = 0 = f(t)$.
   donc $f_{[-\pi,\pi]}$ est paire, et par 2π-périodicité :
   $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

3. La série de Fourier de g est notée $Sg(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big)$.
   (a) Puisque f est paire, on en déduit immédiatement :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 0.}$$
   (b) Tout d'abord, on calcule (en utilisant la parité pour se ramener à $[0, \pi]$) :
   $$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\big[\sin(t)\big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$
   puis pour $n = 1$:
   $$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\big[t + \sin(2t)\big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
   $$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \quad \text{et} \quad a_1 = \frac{1}{2}}$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :
   $$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \big[\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)\big]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin((n+1)t) + \frac{1}{n-1}\sin((n-1)t)\right]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$
   Et finalement, on obtient :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad a_n = \frac{1}{\pi(n+1)}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)}$$

(d) Si n est impair, alors $n+1$ et $n-1$ sont pairs, et $(n+1)/2$ et $(n-1)/2$ sont des entiers, d'où :

$$\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) = 0$$

On conclut avec la relation trouvée à la question précédente :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \ n \text{ impair}, \quad a_n = 0}$$

(e) Soit $n = 2p$ un entier pair non nul :

$$a_n = a_{2p} = \frac{1}{\pi(2p+1)} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(2p-1)} \sin\left(\frac{(2p-1)\pi}{2}\right)$$

Ici, on a :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) &= \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p \\
\sin\left(\frac{(2p-1)\pi}{2}\right) &= \sin\left(p\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{p+1}
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'achever le calcul :

$$\begin{aligned}
a_{2p} &= \frac{(-1)^p}{\pi(2p+1)} + \frac{(-1)^{p+1}}{\pi(2p-1)} = (-1)^{p+1}\left[\frac{1}{\pi(2p-1)} - \frac{1}{\pi(2p+1)}\right] \\
&= (-1)^{p+1}\left[\frac{2}{\pi(2p-1)(2p+1)}\right]
\end{aligned}$$

En développant, on obtient le résultat :

$$\boxed{\text{Si } n = 2p \text{ est un entier pair non nul, alors } a_{2p} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}.}$$

4. On s'intéresse maintenant à la convergence de la série de Fourier de g.

(a) La fonction g est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de g converge donc en tout point $t \in \mathbb{R}$ vers la régularisée $\tilde{g}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Sg(t) = \tilde{g}(t)$$

De plus f est continue sur $]-\pi, \pi]$, donc sur $\mathbb{R}$ (c'est évident pour $t \in]-\pi, \pi] \setminus \{-\pi/2, \pi/2, \pi\}$, et c'est vrai en $-\pi/2, \pi/2, \pi$ car les limites à droite et à gauche de f sont égales à la valeur de f en ces points). On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = f(t)$$

On conclut :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = Sg(t)}$$

(b) On peut donner l'expression de $Sg(t)$ à l'aide des calculs de a_n et b_n précédemment effectués :

$$\begin{aligned}
S_g(t) &= a_0 + a_1 \cos t + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cos(nt) \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(t) + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ pair.}}}^{+\infty} a_n \cos(nt) \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(t) + \sum_{p=1}^{+\infty} a_2 p \cos(2pt) \\
S_g(t) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(t) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)} \cos(2pt)
\end{aligned}$$

Et pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cette relation devient :

$$\cos t = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(t) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}\cos(2pt) \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

On obtient donc presque immédiatement

$$\boxed{\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos t = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}\cos(2pt)}$$

(c) La relation étant vraie pour $t = 0$, on trouve :

$$\cos 0 = 1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$$

D'où :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

Remarque : La relation est aussi vraie pour $t = \frac{\pi}{2}$, et permet de trouver $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$.

5. (a) On peut appliquer l'identité de Parseval à la fonction g, puisqu'elle est 2π-périodique et continue (par morceaux) :

$$\begin{aligned} a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ a_0^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[t + \sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

En simplifiant, la relation devient :

$$\boxed{\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{1}{4}}$$

(b) En isolant la somme, on trouve la valeur :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit n un entier naturel non nul.

Partie I :

1. Très simplement : $e^{in\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^n = (-1)^n$.

$$\boxed{e^{in\pi} = (-1)^n}$$

2. On pose, pour tout entier naturel p, $I_{p,n} = \displaystyle\int_0^\pi t^p e^{int}\,\mathrm{d}t$.

$$I_{0,n} = \int_0^\pi e^{int}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{in}e^{int}\right]_0^1 = \frac{1}{in}\left(e^{in}-1\right) = \frac{-i}{n}\left(e^{in}-1\right)$$

Il reste à utiliser le résultat de ce qui précède :

$$\boxed{I_{0,n} = \frac{-((-1)^n-1)i}{n}}$$

3. Soit $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on procède par une intégration par parties à partir de l'expression de $I_{p,n}$:

$$\begin{array}{lcl} u(t) = t^p & \text{et} & v'(t) = e^{int} \\ u'(t) = pt^{p-1} & & v(t) = \dfrac{1}{ni}e^{int} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} I_{p,n} & = & [\dfrac{1}{in}t^p e^{int}]_0^\pi - \dfrac{p}{in}\displaystyle\int_0^\pi t^{p-1}e^{int}\,\mathrm{d}t \\ & = & \dfrac{\pi^p}{in}e^{in\pi} - \dfrac{p}{in}I_{p-1,n} \end{array}$$

On conclut, avec $\dfrac{1}{i} = -i$ et $e^{in\pi} = (-1)^n$:

$$\boxed{\forall (p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ I_{p,n} = \frac{i(-1)^{n+1}\pi^p}{n} + \frac{ip}{n}I_{p-1,n}}$$

4. On définit les intégrales suivantes :

$$C_{1,n} = \int_0^\pi t\cos(nt)\,\mathrm{d}t\ ,\ S_{1,n} = \int_0^\pi t\sin(nt)\,\mathrm{d}t\ ,\ C_{2,n} = \int_0^\pi t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t\ ,\ S_{2,n} = \int_0^\pi t^2\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

(a) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{array}{rcl} I_{1,n} & = & \dfrac{i(-1)^{n+1}\pi}{n} + \dfrac{i}{n}I_{0,n} \\ & = & \dfrac{i(-1)^{n+1}\pi}{n} + \dfrac{i}{n}\dfrac{-((-1)^n-1)i}{n} = \dfrac{(-1)^n-1}{n^2} + \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n}i \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ I_{1,n} = \frac{(-1)^n-1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}i}$$

En remarquant que $C_{1,n}$ et $S_{1,n}$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $I_{1,n}$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ C_{1,n} = \frac{(-1)^n-1}{n^2} \quad \text{et} \quad S_{1,n} = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}.}$$

(b) De même, on a :

$$\begin{array}{rcl} I_{2,n} & = & \dfrac{i(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \dfrac{2i}{n}I_{1,n} \\ & = & \dfrac{i(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \dfrac{2i}{n}\left[\dfrac{(-1)^n-1}{n^2} + \dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n}i\right] \\ & = & \dfrac{2(-1)^n\pi}{n^2} + \left[\dfrac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \dfrac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3}\right]i \end{array}$$

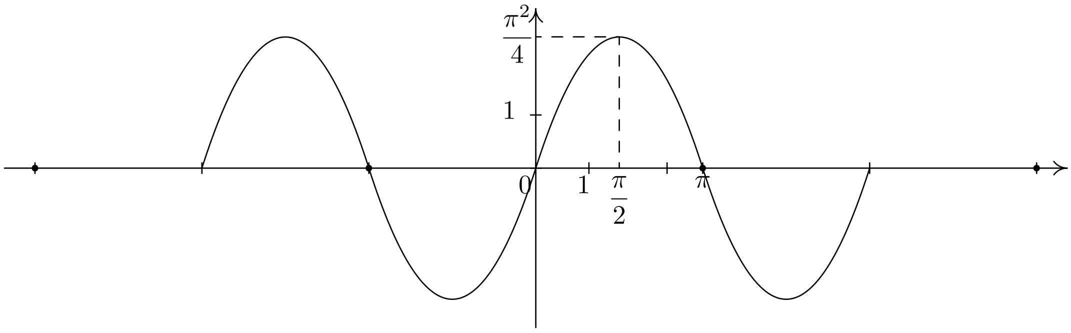
$$\boxed{I_{2,n} = \frac{2(-1)^n\pi}{n^2} + \left[\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3} - \frac{(-1)^n\pi^2}{n}\right]i}$$

En remarquant que $C_{1,n}$ et $S_{1,n}$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $I_{1,n}$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ C_{2,n} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad S_{2,n} = \frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3} - \frac{(-1)^n\pi^2}{n}.}$$

Partie II : Soit f une fonction impaire, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]0, \pi[$ par : $f(t) = \pi t - t^2$.

5. Représentons la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$:



6. Calculons les coefficients de la série de Fourier de f. Le fait que la fonction soit impaire donne :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = 0.}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Procédons au calcul de b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, \mathrm{d}t, \qquad \text{car la fonction } f \text{ est paire.} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^{\pi} t \sin(kt) \, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} t^2 \sin(kt) \, \mathrm{d}t \right] \end{aligned}$$

On reconnaît les expressions des intégrales calculées dans la partie I :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \left[\pi S_{1,k} - S_{2,k} \right] = 2S_{1,k} - \frac{2}{\pi} S_{2,k} \\ &= \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k} - \frac{4\big((-1)^k - 1\big)}{\pi k^3} + \frac{2\pi(-1)^k}{k} \\ &= -\frac{4\big((-1)^k - 1\big)}{\pi k^3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est pair, on a : } b_k = 0 \text{ et si } k \text{ est impair : } b_k = \frac{8}{\pi k^3}.}$$

La série de Fourier de f est donc donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{k impair}}}^{n} \frac{8}{\pi k^3} \sin(kt)}$$

7. (a) La fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de Dirichlet :

$$\boxed{\text{La série de Fourier de } f \text{ converge vers } f \text{ en tout point de } \mathbb{R}.}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{k impair}}}^{+\infty} \frac{8}{\pi k^3} \sin(kt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi (2k+1)^3} \sin((2k+1)t)}$$

(b) En particulier, pour $t = \frac{\pi}{2}$, on trouve :

$$f(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \sin(k\pi + \pi/2) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

En isolant la somme cherchée, on trouve finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}}$$

8. (a) La relation de Parseval, pour une fonction f 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, s'énonce :

$$\boxed{a_0^2(f)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k^2(f)+b_k^2(f)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

(b) La fonction f définie dans ce problème est impaire donc la fonction f^2 est paire car pour tout x réel, $f^2(-x)=\big(-f(x)\big)^2=f^2(x)$. D'où, avec les valeurs de a_k et b_k déjà calculées :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi t-t^2)^2(t)\,\mathrm{d}t$$

On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}(\pi t-t^2)^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi}(\pi^2t^2-2\pi t^3+t^4)(t)\,\mathrm{d}t=\left[\pi^2\frac{t^3}{3}-2\pi\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}\right]_0^{\pi}\\ &= \pi^5\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right]=\frac{\pi^5}{30}\end{aligned}$$

Revenons à la relation de Parseval :

$$\frac{32}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^4}{30}$$

D'où, en isolant la somme :

$$\boxed{S=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}}$$

(c) Soit $T=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$. On sépare cette somme en termes d'ordres pair et impair :

$$\begin{aligned}T &= \sum_{\substack{n=1\\ n\text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^6}+\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^6}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}\\ &= \frac{1}{2^6}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^6}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}\end{aligned}$$

$$\boxed{T=S+\frac{1}{64}T}$$

On isole T :

$$T=\frac{1}{1-\frac{1}{64}}S=\frac{64}{63}\times\frac{\pi^6}{960}$$

$$\boxed{T=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}}$$

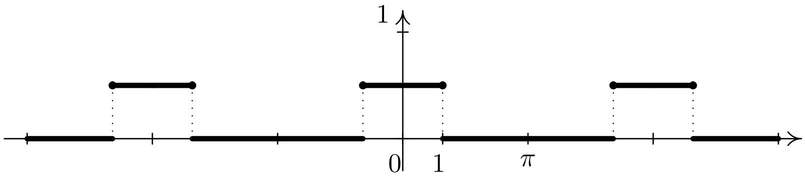
Correction de l'exercice 3 ▲

Partie I

Soit h un réel fixé, élément de l'intervalle $]0,\pi]$ et f la fonction paire et de période 2π vérifiant :

$$f(t)=\frac{1}{2h}\text{ si }t\in[0,h],\text{ et }f(t)=0\text{ si }t\in]h,\pi].$$

1. Représentation de la fonction f sur $[-3\pi,3\pi]$:



2. La fonction f étant paire, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_k = 0$. De plus :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^h \frac{1}{2h}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}$$

et pour $k \geqslant 1$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^h \frac{\cos(kt)}{2h}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi h}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^h = \frac{1}{\pi k}\frac{\sin(kh)}{h}$$

La série de Fourier de f est donc la série de terme général :

$$\boxed{S_{n,f}(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kh)}{kh}\cos(kt)}$$

La fonction f étant 2π-périodique et clairement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on peut utiliser le théorème de Dirichlet :

$$\boxed{\text{La série de Fourier de } f \text{ converge en tout point.}}$$

On peut même préciser cette limite pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{S_f(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{nh}\cos(nt) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}}$$

3. Pour $t = 0$, cette dernière relation donne :

$$S_f(0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{nh} = \frac{1}{2h}$$

D'où la valeur qui en découle :

$$\boxed{A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{n} = \frac{\pi - h}{2}}$$

4. Pour $t = h \in]0, \pi[$, on obtient cette fois-ci :

$$S_f(h) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{nh}\cos(nh) = \frac{0 + \frac{1}{2h}}{2} = \frac{1}{4h}$$

On a, en reformulant avec $\sin(nh)\cos(nh) = \dfrac{1}{2}\sin(2nh)$:

$$\frac{1}{2\pi h}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nh)}{n} = \frac{0 + \frac{1}{2h}}{2} = \frac{1}{4h} - \frac{1}{2\pi}$$

Simplifions :

$$\boxed{B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nh)}{n} = \frac{\pi}{2} - h}$$

Il est à noter que ce résultat n'est pas valable pour $h = \pi$ (dans ce cas, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$, et la somme B est nulle).

5. La formule de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nh)}{n^2h^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^h\frac{1}{4h^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4\pi h}$$

Isolons la valeur cherchée :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nh)}{n^2}=2\pi^2h^2\left(\frac{1}{4\pi h}-\frac{1}{4\pi^2}\right)=\frac{\pi h}{2}-\frac{h^2}{2}$$

Il est donc établi que :

$$\boxed{C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nh)}{n^2}=\frac{\pi h}{2}-\frac{h^2}{2}}$$

6. En prenant une valeur $h=\frac{\pi}{4}$, on obtient en utilisant la valeur de B :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}=\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ impair}}}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$. D'où :

$$\boxed{D=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}}$$

En prenant une valeur $h=\frac{\pi}{2}$, on obtient en utilisant la valeur de C :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{8}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^2((2k+1)\pi/2)}{(2k+1)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$. D'où :

$$\boxed{E=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$

Enfin $\displaystyle F=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=E+\frac{1}{4}F$ donc $\frac{3}{4}E=F$.

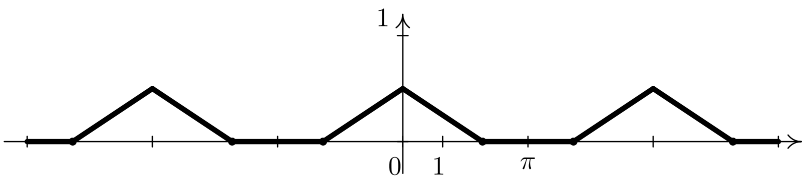
$$\boxed{F=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

Partie II

h est maintenant un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction g est paire, de période 2π vérifiant :

$$g(t)=\frac{1}{2h}\left(1-\frac{t}{2h}\right)\text{ si }t\in[0,2h],\text{ et }f(t)=0\text{ si }t\in]2h,\pi].$$

1. Représentation de la fonction g sur $[-3\pi,3\pi]$:



2. La fonction g étant paire, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\beta_k = 0$. De plus :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2h}\frac{1}{2h}\left(1-\frac{t}{2h}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi h}\left[t-\frac{t^2}{4h}\right]_0^{2h} = \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

et pour $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi h}\int_0^{2h}\left(1-\frac{t}{2h}\right)\cos(kt)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi h}\left[\left(1-\frac{t}{2h}\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{2h} + \frac{1}{\pi h}\int_0^{2h}\frac{\sin(kt)}{2hk}\,\mathrm{d}t\\
\alpha_k &= \frac{1}{2\pi h^2}\frac{-\cos(2kh)+1}{k^2} = \frac{1}{2\pi h^2}\frac{2\sin^2(hk)}{k^2} = \frac{1}{\pi h^2}\frac{\sin^2(hk)}{k^2}
\end{aligned}$$

La série de Fourier de g est donc la série de terme général :

$$\boxed{S_{n,g}(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi h^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2(kh)}{k^2}\cos(kt)}$$

La fonction g étant 2π-périodique et clairement continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on peut utiliser le théorème de Dirichlet :

$$\boxed{\text{La série de Fourier de } g \text{ converge vers } g \text{ en tout point.}}$$

Autrement dit pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{S_g(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi h^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nh)}{n^2}\cos(nt) = g(t)}$$

3. On applique encore la formule de Parseval :

$$\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2 h^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4(nh)}{n^4} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2h} g^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2h} g^2(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2h}\frac{1}{4h^2}\left(1-\frac{t}{2h}\right)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi h^2}\int_0^{2h}\left(1-\frac{t}{h}+\frac{t^2}{4h^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4\pi h^2}\left[t-\frac{t^2}{2h}+\frac{t^3}{12h^2}\right]_0^{2h} = \frac{1}{4\pi h^2}\times\frac{2h}{3} = \frac{1}{6\pi h}
\end{aligned}$$

Il vient ainsi :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4(nh)}{n^4} = \left(\frac{1}{6\pi h}-\frac{1}{4\pi^2}\right)\times 2\pi^2 h^4 = \frac{\pi h^3}{3} - \frac{h^2}{2}$$

$$\boxed{G = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4(nh)}{n^4} = \frac{\pi h^3}{3} - \frac{h^4}{2}}$$

4. En prenant $h = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^4}{32} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\boxed{H = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

Enfin $K=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}=G+\frac{1}{16}K$ donc $\frac{15}{16}K=G$.

$$\boxed{K=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}}$$

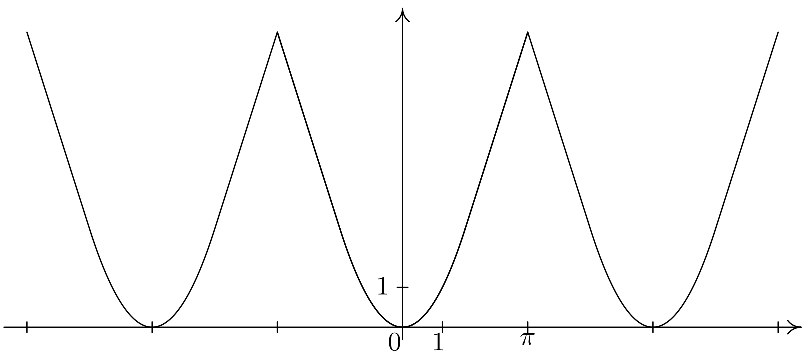
Correction de l'exercice 4 ▲

On considère la fonction paire, 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi x+\alpha & \text{si } \frac{\pi}{2}<x\leqslant \pi \end{cases}$$

où α est un réel que l'on va déterminer.

1. La fonction f est continue en $\pi/2$ si et seulement si les limites à droite et à gauche de f en ce point sont égales à la valeur de f en ce point. Or :
$$\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} f(x)=\frac{\pi^2}{4}=f(\pi/2) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}} f(x)=\frac{\pi^2}{2}+\alpha.$$
La fonction f est donc continue en $\frac{\pi}{2}$ si $\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{2}+\alpha$, c'est à dire :
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue en } \frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha=-\frac{\pi^2}{4}.}$$
Pour la suite de l'exercice, α prendra cette valeur, ainsi f est continue sur $[0,\pi]$.
2. Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi[$, et on calcule :
$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } 0<x<\frac{\pi}{2} \\ \pi & \text{si } \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$
Constatons que $\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} f'(x)=\pi=\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}} f'(x)$, ce qui prouve que :
$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,\pi[\text{ et } f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } 0<x<\frac{\pi}{2} \\ \pi & \text{si } \frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi \end{cases}}$$
Si on ajoute le fait que f et f' ont des limites finies à droite en 0 et à gauche en π, il est prouvé que
$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } [0,\pi]}$$
La parité de f montre alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi,\pi]$, puis la 2π-périodicité permet de conclure :
$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } \mathbb{R}}$$
3. On construit la courbe de f sur $[0,\pi]$, puis on complète par parité sur $[-\pi,\pi]$, et on termine le tracé par 2π-périodicité :



4. 4a. Étant donné que la fonction f est paire, on a directement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = 0}$$

4b. En tout point où f est dérivable, on a $f(-x) = f(x)$, et par dérivation :

$$-f'(-x) = f'(x) \quad \text{d'où :} \quad f'(-x) = -f'(x)$$

$$\boxed{f' \text{ est impaire.}}$$

La fonction f' étant impaire, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f') = 0}$$

4c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par parité de la fonction intégrée, on a :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi[$, on peut appliquer l'intégration par parties qui suit :

$$\begin{array}{lll} u(x) = f(x) & \text{et} & v'(x) = \cos(nx) \\ u'(x) = f'(x) & & v(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx) \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \underbrace{\left[\frac{2f(x)}{n\pi}\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n} \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

par parité de $t \mapsto f'(x)\sin(nx)$ (en effet f' est impaire). On reconnaît ainsi que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n(f) = -\frac{1}{n}b_n(f').}$$

4d. Par l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lll} u(x) = x & \text{et} & v'(x) = \sin(nx) \\ u'(x) = 1 & & v(x) = -\dfrac{1}{n}\cos(nx) \end{array}$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n} + \frac{1}{n^2}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2n}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{n^2}\sin(\frac{n\pi}{2})}$$

Par la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\begin{aligned} b_n(f') &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'(t)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2x\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \pi\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ b_n(f') &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x + 2\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n}\cos(n\frac{\pi}{2}) \\ b_n(f') &= -\frac{2}{n}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{4}{\pi n^2}\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n}\cos(n\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f') = \frac{4}{\pi n^2}\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n}}$$

4e. Avec, d'après la question 4c, $a_n(f) = -\frac{1}{n} b_n(f')$ on calcule :

$$\begin{aligned}
a_{2p}(f) &= -\frac{1}{2p} b_{2p}(f') = -\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{\pi(2p)^2}\underbrace{\sin(p\pi)}_{=0} - \frac{2}{2p}\right) = \frac{1}{2p^2} \\
a_{2p+1}(f) &= -\frac{1}{2p+1} b_{2p+1}(f') = -\frac{1}{2p+1}\left(\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\underbrace{\sin(p\pi+\pi/2)}_{=(-1)^p} + \frac{2}{2p+1}\right) \\
&= \frac{4(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^3} - \frac{2}{(2p+1)^2}
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\pi x - \frac{\pi^2}{4}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{\pi^2}{4}x\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{7\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_0(f) = \frac{7\pi^2}{24} \text{ et pour } p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{2p}(f) &= \dfrac{1}{2p^2} \\ a_{2p+1}(f) &= \dfrac{4(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^3} - \dfrac{2}{(2p+1)^2} \end{cases}.}$$

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet :

$$\boxed{\text{La série de fourier de } f \text{ converge vers } f \text{ en tout point.}}$$

6. Autrement dit,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

En séparant les termes d'ordre pair et impair on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0(f) + \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}\cos(2pt) + \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}\cos((2p+1)t)$$

Évaluons cette somme en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$f(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} = a_0(f) + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p a_{2p} = \frac{7\pi^2}{24} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p^2}$$

On peut enfin isoler :

$$\boxed{S = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

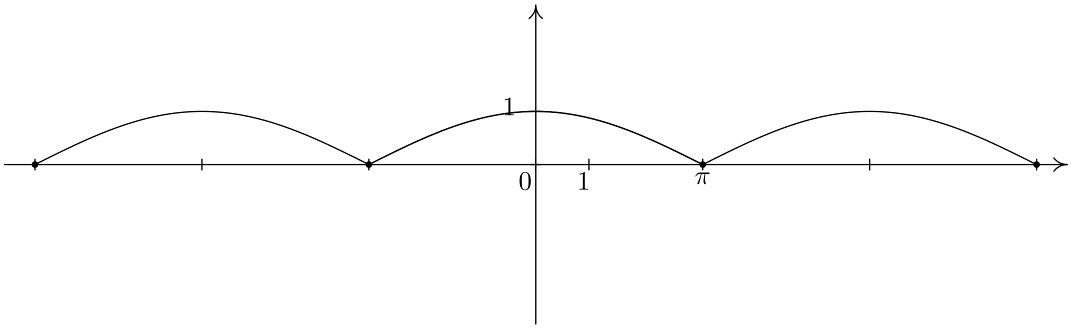
Soit $a \in]0,1[$ un paramètre. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que :

$$\forall t \in [-\pi,\pi], \quad f(t) = \cos(at)$$

1. La fonction cos est paire, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = f(t)$:

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

2. Graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ pour la valeur $a = 1/2$:



Dans les questions suivantes, a est un réel quelconque de $]0,1[$.

3. La série de Fourier de f est notée $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.

   (a) Tout d'abord, on calcule (en utilisant la parité pour se ramener à $[0,\pi]$) :

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(at)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}\sin(at)\right]_0^{\pi} = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} \end{aligned}$$

   puis pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(at)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(at)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \big[\cos((a+n)t) + \cos((a-n)t)\big]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a+n}\sin((a+n)t) + \frac{1}{a-n}\sin((a-n)t)\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

   Achevons le calcul :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a+n}\sin((a+n)\pi) + \frac{1}{a-n}\sin((a-n)\pi)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{a+n}\sin(a\pi) + \frac{(-1)^n}{a-n}\sin(a\pi)\right] \\ &= \frac{2(-1)^n a \sin(a\pi)}{\pi(a^2-n^2)} \end{aligned}$$

$$\boxed{a_0(f) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{2(-1)^n a \sin(\pi a)}{\pi(a^2-n^2)}}$$

   (b) Comme la fonction f est paire alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0.}$$

   (c) On en déduit la valeur :

$$\boxed{S_f(t) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \frac{2a\sin(\pi a)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos(nt)}$$

4. (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, et continue sur $\mathbb{R}$. En effet :

   ⋆ f est continue sur $]-\pi,\pi[$.

   ⋆ $\lim_{t\to\pi^+} f(t) = \lim_{t\to-\pi^-} f(t) = \cos(a\pi) = f(\pi) = \lim_{t\to\pi^-} f(t)$ donc f est continue en π.

   D'après le théorème de Dirichlet :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ S_f(t) = f(t)}$$

(b) En particulier, pour $t = \pi$:

$$\begin{aligned}\cos(\pi a) = f(\pi) = S_f(\pi) &= \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \frac{2a\sin(\pi a)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos(n\pi)\\ &= \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \frac{2a\sin(\pi a)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n}}{a^2-n^2}\\ &= \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a\sin(\pi a)}{n^2-a^2}\end{aligned}$$

On en déduit la valeur de l'expression :

$$\boxed{\frac{\sin(\pi a)}{\pi a} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a\sin(\pi a)}{n^2-a^2} = \cos(\pi a)}$$

5. Dans cette question, on considère le cas $a = 1/2$.

(a) La fonction f est 2-π périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer l'identité de Parseval à f :

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Avec

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi}\cos^2(t/2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\cos^2(t/2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left[t+\sin t\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, la relation de Parseval devient :

$$\frac{\sin^2(\pi/2)}{\pi^2(1/2)^2} + \frac{\sin^2(\pi/2)}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1/4-n^2)^2} = \frac{1}{2}$$

Soit, en simplifiant :

$$\boxed{\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{2}}$$

(b) On en déduit la valeur :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n^2-1}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\right)$$

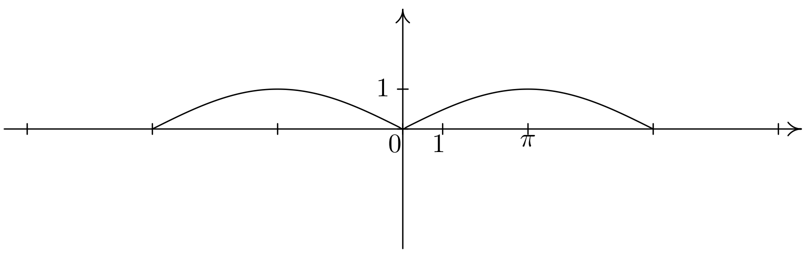
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n^2-1}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \varphi(t) = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

1. Représentons la fonction φ sur $[-2\pi, 2\pi]$:



2. L'application φ sur $\mathbb{R}$ est composée des fonctions continues $t \mapsto |t|$ et $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{2}\right)$, donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Remarquons que φ est 2π-périodique, puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t+2\pi) = \left|\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)\right| = \left|-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \varphi(t)$$

L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,2\pi[$. De plus :

$$\forall t \in]0,2\pi[, \;\; \varphi(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{et} \quad \forall t \in]0,2\pi[, \;\; \varphi'(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

On observe que φ' a des limites finies en 0 et 2π, et ceci prouve que la restriction de φ à $[0,2\pi]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,2\pi]$. Ainsi, en remarquant que la fonction φ est 2π-périodique :

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } \mathbb{R}.}$$

En revanche, $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \varphi'(t) = -\frac{1}{2} \neq \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \varphi'(t) = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

3. La fonction φ est paire, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \;\; b_n = 0}$$

Il reste à calculer a_n, pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{\pi}}$$

et pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2n-1)t}{2}\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)t}{2}\right) + \frac{2}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\right]_0^{\pi} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}\right] = \frac{2}{\pi} \times \frac{2n-1-(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}}$$

La fonction φ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet :

$$\boxed{\text{La série de Fourier de } f \text{ converge vers } f \text{ en tout point.}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \;\; f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(kt)}$$

4. Les sommes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$ convergent par équivalence de leurs termes généraux avec celui d'une série de Riemann. De plus :

$$f(0) = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

En isolant la somme cherchée, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}}$$

Enfin, le théorème de Parseval s'applique puisque la fonction φ est continue par morceaux et 2π-périodique :

$$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t$$

avec :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(t/2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1-\cos(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{2}$$

En isolant la somme cherchée, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}}$$