Sujets : Séries numériques.

Énoncés des sujets :

Exercice 1

On considère les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dont le terme général est défini pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln n}{n} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$$

Par ailleurs les sommes partielles de ces séries sont notées pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \qquad \text{et} \qquad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k}$$

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

2. Recherche d'un équivalent de U_n.
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
   (b) En déduire que pour tout entier k supérieur ou égal à 4, on a :
   $$\int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$$
   (c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives A, B et C telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on ait :
   $$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leqslant U_n - B \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$
   (d) Montrer que $\ln^2(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$.
   (e) En déduire que $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{2}$.

3. On donne la suite W_n définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ W_n = U_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$
   (a) Montrer que pour $n \geqslant 3$, $W_{n+1} - W_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire le sens de variation pour $n \geqslant 3$ de la suite (W_n), puis la convergence de cette suite.
   Dans la suite de l'exercice, la limite de cette suite sera notée ℓ. On pourra ainsi écrire :
   $$U_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)$$

4. Étude de la suite (V_n).
   (a) Prouver que pour tout entier naturel non nul n, on a :
   $$V_{2n} = U_{2n} - U_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
   Indication : on pourra séparer la somme V_{2n} en deux sommes, l'une comprenant les termes d'indice pair, et l'autre ceux d'indice impair.
   (b) On admet qu'il existe un réel γ tel que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$
   En déduire que la suite $(V_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

(c) Montrer que la suite $(V_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite en fonction de γ.

(d) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge. Cette série converge t-elle absolument ?

Correction ▼ [sn1]

Exercice 2

On définit la suite (a_n) par son premier terme $a_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$$

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante.
2. En déduire que la suite (a_n) n'est pas majorée (on pourra raisonner par l'absurde).
   Préciser la limite de (a_n).
3. On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ avec $b_n = \dfrac{1}{a_n}$.
   (a) Justifier la convergence de cette série.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
   $$b_k = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1}$$
   En déduire la somme de la série.

Correction ▼ [sn2]

Exercice 3

Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

1. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $u \mapsto 1 + a\sqrt{1+u} + b\sqrt{1+2u}$.
2. En déduire que la suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si $a + b = -1$.
3. Déterminer a et b pour que la série $\sum u_n$ soit convergente.
4. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ dans ce dernier cas.

Correction ▼ [sn3]

Exercice 4

On cherche à étudier la série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$.

1. Montrer la convergence de cette série.
2. Déterminer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant 3,\qquad \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{\alpha}{n-2} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n+2}$$
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}$.

Correction ▼ [sn4]

Exercice 5

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   On note ensuite U la somme de la série, U_n la somme partielle d'indice n, et R_n le reste d'indice n défini par :
$$R_n = U - U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$
2. Montrer par récurrence que :
$$\forall k \geqslant 0, \quad u_{n+k+1} \leqslant \frac{u_{n+1}}{25^k}$$
   Montrer ensuite que
$$\forall n \geqslant 1, \quad R_n \leqslant \frac{25}{24} u_{n+1}$$
3. En déduire la valeur minimale de n pour laquelle U_n est une valeur approchée de U à 10^{-3} près.

Correction ▼ [sn6]

Exercice 6

1. Donner, sans démonstration, une condition nécessaire et suffisante, portant sur le réel α, pour que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ soit convergente.
2. Soit $\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. Donner, sans démonstration, le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto (1+x)^\beta$.

   Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$A_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right) - \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$
3. Déterminer le réel K, qui dépend de α, tel que l'on ait, quand $n \to +\infty$:
$$A_n - A_{n-1} = \frac{K}{n^{\alpha+1}} + o\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$$
4. Quelle est la nature de la série $\sum \Big(A_n - A_{n-1}\Big)$?
5. Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note L sa limite.
6. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \to +\infty$.

Correction ▼ [sn7]

Exercice 7

On donne la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. On note $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1. Quelle est la nature de cette série ?
2. Étudier et représenter la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ avec $t \in \mathbb{R}_+^*$.
3. En intégrant $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ entre des bornes bien choisies, montrer la relation :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$$
4. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n} + 1$$
   puis montrer avec soin que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.
5. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

   Montrer que $S_{n+1} - S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4n\sqrt{n}}$.

6. En déduire qu'il existe une constante C telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n}+C+o(1)$.

Correction ▼ [sn8]

Exercice 8

Étudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum u_n$ où $u_n = \ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$.
2. $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$.

Correction ▼ [sn9]

Exercice 9

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Étudier les variations de la suite (u_n).
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 1$.
   (a) Pour tout entier naturel k, exprimer $v_{k+1} - v_k$ en fonction de v_k.
   (b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k)$.
   (c) Donner, pour finir, la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

Correction ▼ [sn10]

Exercice 10

I. Dans cette question, on cherche à établir le critère de Cauchy pour les séries numériques à termes strictement positifs :

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell, \text{ alors : } \begin{cases} \ell < 1 & \Longrightarrow \quad \text{La série } \sum u_n \text{ converge.} \\ \ell > 1 & \Longrightarrow \quad \text{La série } \sum u_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

On suppose donc que (u_n) est une série à termes > 0 tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

1. Rappeler la définition avec des quantificateurs de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
2. On suppose que $\ell < 1$. Soit $r \in]\ell, 1[$ fixé :
   (a) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, on a $\sqrt[n]{u_n} \leqslant r$.
   (b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.
3. On suppose que $\ell > 1$.
   Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant 1$. Conclure.
4. Application : À l'aide du critère de Cauchy, étudier la nature de la série $\sum \left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^{2n}$.

II. Soit $\alpha \geqslant 0$. On veut étudier la série $\sum u_n$ avec $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}$.

1. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série lorsque $\alpha = 0$?
2. Donner la nature de la série $\sum u_n$ lorsque $\alpha = 2$ (on pourra utiliser le critère de Cauchy).
   En déduire la nature de cette série lorsque $\alpha \geqslant 2$.
3. Donner la nature de la série $\sum u_n$ lorsque $\alpha = 1$.
   En déduire la nature de cette série lorsque $0 < \alpha \leqslant 1$.

4. Dans cette question, on suppose $1 < \alpha < 2$.
   (a) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n^{\alpha-1}}$.
   (b) Montrer que quand $n \to +\infty$, on a $e^{-n^{\alpha-1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Correction ▼ [sn11]

Exercice 11

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que le *produit infini* $\prod a_n$ converge s'il existe $\ell \in \mathbb{R}^*$ tel que la suite de terme général

$$\prod_{k=0}^{n} a_k \text{ converge vers } \ell.$$

Dans ce cas, on note $\ell = \prod_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1. Montrer que si le *produit infini* $\prod a_n$ converge, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$$

On pose désormais $a_n = 1 + u_n$, et on suppose par la suite que $a_n > 0$ pour tout entier n.

2. (a) Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum \ln(a_n)$ converge.
   Dans ce cas, donner la relation entre $\prod_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(a_k)$
   (b) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 1$. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
   (c) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in [0,1[$. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
   (d) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in]0,+\infty[$. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors le produit $\prod a_n$ converge.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.
   En déduire $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.
4. Justifier la convergence du produit $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ et montrer que ce produit vaut $\dfrac{1}{3}$.
5. Dans cette question, on cherche à étudier le produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.
   On rappelle le théorème suivant concernant toute suite réelle (v_n) :

Si (v_{2n}) et (v_{2n+1}) ont la même limite ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

   On notera $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.
   (a) Simplifier le produit $\left(1+\dfrac{1}{2k-1}\right)\left(1-\dfrac{1}{2k}\right)$. En déduire l'expression de P_{2n}.
   (b) Donner l'expression de P_{2n+1} en fonction de P_{2n}.
   (c) En déduire la convergence et la valeur du produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.
   (d) La réciproque de la question 2d est-elle vraie ? Justifiez.

Correction ▼ [sn12]

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$: $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$. On a bien sûr $S_0 = n$ et on sait que $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. En calculant de deux manières $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right)$, montrer qu'on a :

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3S_1 + n$$

et en déduire la valeur de S_2 (sous forme factorisée).

2. Utiliser une technique analogue pour calculer S_3 et S_4 (sous forme factorisée).
3. Vérifier que pour $p = 0, 1, 2, 3, 4$, on a :

$$S_p \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

Correction ▼ [sn13]

Exercice 13

Soit a, b, c, d des réels strictement positifs et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$.
   (a) Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$, qu'on exprimera en fonction de a, b, c, d et α tel que :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   (b) En déduire que (v_n) converge vers une limite ℓ si et seulement si $\alpha = c + d - a - b$.
2. On suppose cette condition remplie. En déduire un équivalent de la suite (u_n) en fonction de ℓ et de α.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3}$?
4. Calculer $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ lorsque $u_0 = 1$, $a = 1, b = 3, c = 2$ et $d = 4$.

Correction ▼ [sn14]

Exercice 14

On désigne par r un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

1. (a) Justifier la convergence de la série de terme général $u_n(r) = r^n \cos(n\theta)$.
   (b) Calculer la somme de la série : $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta)$.
2. On pose $f(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}$.
   (a) Justifier l'existence de $f(r,\theta)$ pour $r \in]0,1[$ et tout θ réel.
   (b) Déduire de la question précédente l'égalité :

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta).$$

Correction ▼ [sn15]

Exercice 15

On considère la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}$.

1. Étudier la nature de cette série.
2. Établir le résultat pour $k\geqslant 1$:
$$\frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}=\frac{2\times 2^k-3^k}{3^k-2^k}-\frac{2\times 2^{k+1}-3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}$$
3. En déduire la somme de la série.

Correction ▼ [sn16]

Exercice 16

Dans cet exercice, on pose :
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\qquad\text{et}\qquad u_n=S_{n-1}-\ln n.$$

1. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $x_n=\dfrac{1}{n}+\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.
   (a) Faire un développement limité de x_n en $1/n$ à l'ordre 2.
   (b) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}x_n$?
2. (a) Calculer $u_{n+1}-u_n$.
   (b) En déduire la convergence de la suite (u_n), puis un équivalent de S_n.

Correction ▼ [sn17]

Exercice 17

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques séries par comparaison avec une intégrale :

1. *La série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{1}{n(\ln n)^2}$. On se propose de montrer que cette série converge.

   On pose pour $n\geqslant 3$, $u_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$, et $U_n=\displaystyle\sum_{k=3}^{n}u_k=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^2}$.

   (a) Pour $x\geqslant 2$, calculer $\displaystyle\int_2^x\frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$ (on pourra effectuer le changement de variable $u=\ln t$).
   (b) Justifier que pour $k\geqslant 3$, on a :
$$0\leqslant\frac{1}{k(\ln k)^2}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$$
   (on pourra utiliser la décroissance de la fonction $t\mapsto\frac{1}{t(\ln t)^2}$ sur $]1,+\infty[$ et s'aider d'un dessin).
   (c) En déduire que, pour tout entier $n\geqslant 3$, $U_n\leqslant\dfrac{1}{\ln 2}$. Conclure.
2. *La série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n}$.
   (a) Justifier qu'il s'agit d'une série divergente.

   On pose pour $n\geqslant 1$, $v_n=\dfrac{\ln n}{n}$, et $V_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}v_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}$.

   (b) Pour $x\geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(c) Faire l'étude des variations de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ sur $]0, +\infty]$, et la représenter.

(d) En déduire que pour $k \geqslant 3$, on a :

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k}$$

puis que pour $k \geqslant 4$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(e) En effectuant une sommation, prouver alors que :

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant V_n \leqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_3^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(f) En déduire que $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{2}$.

(g) On pose $W_n = V_n - \dfrac{(\ln n)^2}{2}$.

i. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $W_n - W_{n-1} = \dfrac{\ln n}{n} - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

ii. En déduire le sens de variation de la suite (W_n), puis la convergence de cette suite.

(h) Justifier qu'il existe une constante C telle que :

$$V_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)$$

Correction ▼ [sn19]

Exercice 18

L'objet de cet exercice est d'obtenir une approximation de la constante d'Euler définie par :

$$S = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$(1) \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t}{t+n}\,\mathrm{d}t,$$

et $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Expliciter u_n. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

2. Expliciter S_n. En déduire la relation $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

(On pourra dans (1) majorer et minorer le dénominateur).
En déduire un encadrement de $S - S_n$.

4. On veut déterminer une valeur approchée de S en calculant une somme partielle S_n. Déterminer une valeur de n permettant d'obtenir une valeur approchée de S à 10^{-2} près.
Que pensez vous de cette méthode d'évaluation ?

Correction ▼ [sn01]

Exercice 19

Le but de cet exercice est de déterminer un développement asymptotique de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Un équivalent de H_n**

   Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Si k est un entier non nul, montrer que : $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire l'encadrement suivant : $\ln n + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln n + 1$.

   (c) Donner un équivalent de H_n en $+\infty$.

2. **Suites adjacentes**

   Soit deux suites de réels (v_n) et (w_n) adjacentes c'est à dire que :

   $$(v_n) \text{ est croissante, } (w_n) \text{ est décroissante, et } \lim_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0.$$

   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant w_n + 1$.
   En déduire que la suite (v_n) est majorée.

   (b) Montrer de même que la suite (w_n) est minorée.

   (c) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.

3. **Constante d'Euler**

   On pose, pour $n \geqslant 1$, $c_n = H_n - \ln n$ et $d_n = c_n - \frac{1}{n}$.

   (a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$.

   (b) Montrer que les suites (c_n) et (d_n) convergent vers une même limite.
   On note alors γ cette limite (γ est appelée constante d'Euler).

   (c) Montrer que : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Correction ▼ [sn02]

Exercice 20

Partie I : Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Vérifier que $B_0 = b_0$ et $\forall n \geqslant 1$, $b_n = B_n - B_{n-1}$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (a) Montrer que la suite $(a_n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (b) On suppose de plus que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente ; montrer alors que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1}) B_n$ est absolument convergente et en déduire la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

3. Établir que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

4. On appelle *série alternée* une série du type $\sum(-1)^n a_n$ avec $a_n > 0$.

   Énoncez et démontrez (à l'aide de ce qui précède) un critère simple sur la suite (a_n) garantissant la convergence d'une série alternée.

   En déduire très simplement la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Partie II : Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \text{ et } C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} e^{ix},$$

   et que

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } S_n(x) = \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. En déduire alors que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Dans la suite, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, et on cherche à calculer la somme de cette série.

3. (a) Vérifier que f est impaire et 2π-périodique.

   (b) Soit $x \in]0, \pi[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t$.

4. Soit $x \in]0, \pi[$; pour tout $t \in [x, \pi]$, on pose $h(t) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

   (a) Vérifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, \pi]$ et que h' y est bornée.

   (b) Montrer la formule :

$$\int_x^{\pi} h(t)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \int_x^{\pi} h'(t)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right).$$

   (c) En déduire un majorant pour la valeur absolue de l'intégrale du premier membre et conclure que cette intégrale tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   (d) Établir alors que pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

Partie III : Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

On conserve les notations de la partie précédente.

1. Soit $x \in]0, 2\pi[$.

   (a) Montrer, en utilisant une transformation d'Abel (I.1), que pour tout couple (m, n) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant m < n$, on a

$$\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{S_m(x)}{m+1}.$$

   (b) En déduire que

$$\left|\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et que } \left|\sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2. Soit $x \in]0, \pi]$. On note k la partie entière de $\dfrac{\pi}{x}$: $k = E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$; on a donc $k \geqslant 1$.

(a) Montrer que $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{\sin(px)}{p} \leqslant kx \leqslant \pi$.

(b) Montrer que si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\sin\theta \geqslant \dfrac{2}{\pi}\theta$.

(c) Soit $n \geqslant k+1$; Montrer alors que $\left|\displaystyle\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2$.

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2 + \pi$$

Correction ▼ [sn03]

Corrigés des sujets :

Correction de l'exercice 1 ▲

1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série à termes positifs, et de plus pour $n \geqslant 3$, on a :

$$\ln n \geqslant \ln e = 1, \quad \text{donc :} \quad u_n = \frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

Puisque la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, on en conclut par cette minoration que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ diverge.}}$$

2. Recherche d'un équivalent de U_n.

(a) La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty]$ et :

$$\forall x \in]0,+\infty], \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

avec $1 - \ln x = 0$ si et seulement si $x = e$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

(b) Soit $k \geqslant 3$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, donc :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{\ln k}{k}$$

Par passage à l'intégrale, il vient :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(k+1)}{k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln(k+1)}{k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln k}{k}$$

Après calcul :

$$\forall k \geqslant 3, \quad \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln k}{k}$$

Pour $k \geqslant 4$, on conserve l'inégalité de droite et on fait un décalage d'indice $k \to k-1$ dans celle de gauche pour obtenir :

$$\boxed{\forall k \geqslant 4, \quad \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x}$$

(c) Par une sommation de 4 jusqu'à n :

$$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_3^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

c'est à dire :

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant U_n - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} \leqslant \int_3^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Puisque $\displaystyle\int_a^b \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[(\ln t)^2\Big]_a^b = (\ln b)^2 - (\ln a)^2$, on en déduit immédiatement :

$$\boxed{\frac{1}{2}\big(\ln(n+1)\big)^2 - \frac{1}{2}(\ln 4)^2 \leqslant U_n - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} \leqslant \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2}$$

(d) On transforme simplement :

$$\frac{1}{2}\big(\ln(n+1)\big)^2 = \frac{1}{2}\big(\ln n + \ln(1+1/n)\big)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

(e) L'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2}\big(\ln(n+1)\big)^2 - \frac{1}{2}(\ln 4)^2 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}$$

prouve que U_n est encadré par deux termes équivalents à $\dfrac{(\ln n)^2}{2}$ au voisinage de $+\infty$. On en conclut que :

$$\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}}$$

Remarque : c'est une variante immédiate du théorème des gendarmes, qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{\frac{1}{2}(\ln n)^2} = 1$.

3. On donne la suite W_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ W_n = U_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

(a) On calcule pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= U_{n+1} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \left(U_n - \frac{(\ln n)^2}{2}\right) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \left(\frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln n)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Or, on sait que $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{(\ln t)^2}{2}$. Il est donc possible d'écrire :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \quad W_{n+1} - W_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t}$$

(b) Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$, on en déduit que pour $n \geqslant 3$, on a :

$$\forall t \in [n, n+1], \quad \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \frac{\ln t}{t}$$

et par conservation des inégalités lors du passage à l'intégrale entre n et $n+1$:

$$(n+1-n)\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit : $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (W_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante.}}$$

De plus d'après la question 1a, on a pour $n \geqslant 4$:

$$W_n \geqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} - \frac{1}{2}(\ln 4)^2 + \underbrace{\frac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{2} - \frac{(\ln n)^2}{2}}_{\geqslant 0}$$

Ainsi $W_n \geqslant \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} - \dfrac{1}{2}(\ln 4)^2$.

La suite (W_n) est décroissante et minorée, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La suite } (W_n) \text{ est convergente.}}$$

4. Étude de la suite (V_n).

(a) Séparons la somme V_{2n} en deux séries :

$$\begin{aligned}
V_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k} = \sum_{\substack{k=1\\k \text{ pair}}}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k} + \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k-1}\frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k}\\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{2n}\frac{\ln k}{k}
\end{aligned}$$

Par une astuce d'écriture, on peut reconnaître la somme U_{2n} :

$$\begin{aligned}
V_{2n} &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{2n}\frac{\ln k}{k}\\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{k} + \underbrace{\sum_{\substack{k=1\\k \text{ pair}}}^{2n}\frac{\ln k}{k} + \sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{2n}\frac{\ln k}{k}}_{U_{2n}} = U_{2n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{k}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln 2 + \ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} + \ln 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k} = U_n + \ln 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}$$

Il reste à rassembler les calculs :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_{2n} = U_{2n} - U_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$$

(b) On admet qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

En utilisant le résultat de la question 3, on peut ainsi écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
V_{2n} &= \frac{\ln^2(2n)}{2} + \ell + o(1) - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ell + o(1) - \ln(2)\big(\ln(n) + \gamma + o(1)\big)\\
&= \frac{(\ln(2) + \ln n)^2}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2)\ln(n) - \gamma\ln(2) + o(1)\\
&= \frac{\ln(2)^2 + 2\ln(2)\ln n + (\ln n)^2}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2)\ln(n) - \gamma\ln(2) + o(1)
\end{aligned}$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{2n} = \dfrac{\ln(2)^2}{2} - \gamma\ln(2) + o(1)$. On conclut :

$$\boxed{(V_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} V_{2n} = \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma\ln(2).}$$

(c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_{2n+1} = V_{2n} + \dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1}$. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = 0 \quad \text{par croissances comparées.}$$

Les suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) ont donc la même limite :

$$\boxed{(V_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} V_{2n+1} = \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma\ln(2).}$$

(d) Les suites extraites d'ordre pair et impair de (V_n) ont la même limite finie, ce qui prouve que (V_n) converge vers cette limite :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ converge (et sa somme est } V = \frac{\ln(2)^2}{2} - \gamma\ln(2)).}$$

Comme on l'a vu à la question 1, il s'agit d'une série convergente mais non absolument convergente.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Un simple calcul donne : $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 \geqslant 0$, et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est croissante}}$$

2. Supposons que la suite (a_n) est majorée. Étant croissante, elle converge alors vers une limite ℓ. La relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n donne, par passage à la limite :

$$\ell = \ell^2 - \ell + 1$$

d'où $\ell^2 - 2\ell + 1 = (\ell - 1)^2 \geqslant 0$, ce qui implique $\ell = 1$. C'est impossible car la suite (a_n) est croissante et $a_0 = 2$. En conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ n'est pas majorée.}}$$

(a_n) est croissante et non majorée, on conclut que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$$

3. On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ avec $b_n = \frac{1}{a_n}$.

(a) La suite (b_n) est à termes strictement positifs. On peut donc utiliser le critère de D'Alembert :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n^2 - a_n + 1}$$

Or $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{a_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a_n}$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0 < 1$, et d'après le critère de D'Alembert :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ est convergente.}}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1} &= \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_k^2 - a_k + 1 - 1} \\
&= \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_k(a_k - 1)} = \frac{a_k - 1}{a_k(a_k - 1)} = \frac{1}{a_k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{b_k = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1}}$$

Si on effectue les sommes partielles, on reconnaît un télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = -\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a_{k+1} - 1} - \frac{1}{a_k - 1}\right) = -\left(\frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_0 - 1}\right)$$

et par passage à la limite :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 1}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

1. Procédons à un développement limité en 0 :

$$\begin{aligned} 1 + a\sqrt{1+u} + b\sqrt{1+2u} &\underset{u\to 0}{=} 1 + a\left(1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)\right) + b\left(1 + u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) \\ &\underset{u\to 0}{=} (1+a+b) + \frac{a+2b}{2}u - \frac{a+4b}{8}u^2 + o\left(u^2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{1 + a\sqrt{1+u} + b\sqrt{1+2u} \underset{u\to 0}{=} (1+a+b) + \frac{a+2b}{2}u - \frac{a+4b}{8}u^2 + o\left(u^2\right)}$$

2. On utilise le calcul précédent avec $u = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(1 + a\sqrt{1+1/n} + b\sqrt{1+2/n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left((1+a+b) + \frac{a+2b}{2n} - \frac{a+4b}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} (1+a+b)\sqrt{n} + \frac{a+2b}{2\sqrt{n}} - \frac{a+4b}{8n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

En particulier $u_n \underset{n\to+\infty}{=} (1+a+b)\sqrt{n} + o(1)$ d'où :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ tend vers 0 si et seulement si } a+b=-1.}$$

3. Pour que la série $\sum u_n$ converge, il est nécessaire que u_n tende vers 0, donc $a+b=-1$.
Il est également nécessaire que $a+2b=0$. En effet, si $a+2b \neq 0$ on a :

$$u_n \underset{n\to 0}{\sim} \frac{a+2b}{2\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge (série de Riemann divergente avec } \alpha = 1/2 \leqslant 1)$$

Ces conditions donnent les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} a+b &= -1 \\ a+2b &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

Réciproquement, ces valeurs donnent une série convergente puisque dans ce cas :

$$u_n = -\frac{1}{4n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^{3/2}} \leqslant 0$$

Et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3/2 > 1$. En résumé :

$$\boxed{\text{La série } \textstyle\sum u_n \text{ converge si et seulement si } a=-2 \text{ et } b=1.}$$

4. Dans ce dernier cas, on peut calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à l'aide des sommes partielles :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \left[\sqrt{k} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right) + \sum_{k=0}^{n} \left[\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right] \end{aligned}$$

On observe deux télescopages :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = -\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 1$$

Puis, en utilisant la quantité conjuguée :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - 1$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -1}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On a clairement :
$$\frac{2n-1}{n^3-4n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2} \geqslant 0$$
Le terme général de la série est équivalent (à un coefficient près) au terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), d'où :
$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} \text{ converge.}}$$
On remarque au passage que le signe du terme général de la série est celui de l'équivalent à partir d'un certain rang, ce qui permet d'appliquer le critère.
2. On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{n^3-4n} &= \frac{\alpha}{n-2} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n+2} \\ &= \frac{\alpha n(n+2) + \beta(n-2)(n+2) + \gamma n(n-2)}{n(n-2)(n+2)} \\ &= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)n^2 + (2\alpha - 2\gamma)n - 4\beta}{n^3+4n} \end{aligned}$$
Par identification, on trouve
$$\left\{ \begin{array}{lcl} -4\beta &=& -1 \\ 2\alpha - 2\gamma &=& 2 \\ \alpha+\beta+\gamma &=& 0 \end{array} \right., \text{ soit après calcul } \beta = \frac{1}{4},\ \alpha = \frac{3}{8} \text{ et } \gamma = -\frac{5}{8}.$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant 3,\quad \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{3}{8(n-2)} + \frac{1}{4n} - \frac{5}{8(n+2)}}$$
3. Avec ce dernier résultat, les sommes partielles de la série peuvent s'écrire comme suit :
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2}$$
On se ramène à des sommes de même indice par des décalages d'indice :
$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k} \\ &= \frac{3}{8}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right] \\ &\quad -\frac{5}{8}\left[\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right] \end{aligned}$$
Il suffit alors de rassembler les termes communs aux trois sommes :
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{3}{8}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right] - \frac{5}{8}\left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right]$$

Puis de passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k} \quad = \quad \frac{3}{8}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]$$

Après calcul :

$$\boxed{\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{89}{96}}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Remarquons que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est une série à termes positifs. De plus, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)5^{2n-1}}{(2n+1)5^{2n+1}} = \frac{(2n-1)}{(2n+1)5^2} = \frac{1-\dfrac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}} \times \frac{1}{5^2}$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{25} < 1$. D'après le critère de d'Alembert :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geqslant 1} u_n \text{ est convergente.}}$$

2. Remarquons pour tout entier n on a $\frac{2n-1}{2n+1} \leqslant 1$, le calcul de la question précédente montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{25}, \quad \text{c'est à dire :} \quad u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{25}$$

Montrons alors par récurrence sur k que :

$$\forall k \geqslant 0, \quad u_{n+k+1} \leqslant \frac{u_{n+1}}{25^k}$$

C'est clair pour $k=0$. Soit $k \geqslant 0$ fixé. On suppose que $u_{n+k+1} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{25^k}$. D'après la remarque et l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+k+2} \leqslant \frac{1}{25} u_{n+k+1} \leqslant \frac{1}{25} \times \frac{u_{n+1}}{25^k} \leqslant \frac{u_{n+1}}{25^{k+1}}$$

Le résultat est vrai au rang $k+1$. On conclut par récurrence que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 0, \quad u_{n+k+1} \leqslant \frac{u_{n+1}}{25^k}}$$

Cette inégalité permet de majorer le reste d'indice n moyennant un décalage d'indice :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n+k+1} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{25^k}$$

On reconnaît dans le majorant la somme d'une série géométrique convergente de raison $\dfrac{1}{25} < 1$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{25^k} = u_{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^k = \frac{u_{n+1}}{1-\frac{24}{25}}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad R_n \leqslant \frac{25}{24} u_{n+1}}$$

3. U_n est une valeur approchée de U à 10^{-3} près lorsque $R_n \leqslant 10^{-3}$. Or on a vu que pour $n \geqslant 1$:

$$R_n \leqslant \frac{25}{24} u_{n+1} = \frac{25}{24 \times (2n+1) \times 5^{2n+1}}$$

On a donc $R_1 \leqslant \dfrac{25}{24 \times 3 \times 5^3} \simeq 0,028$ et $R_2 \leqslant \dfrac{25}{24 \times 5 \times 5^5} \simeq 6,7 \times 10^{-5}$, donc $R_2 < 10^{-3}$.

En conclusion :

$$\boxed{U_2 = u_1 + u_2 \text{ est une valeur approchée à } 10^{-3} \text{ près de } U.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Le critère de Riemann nous permet d'affirmer l'équivalence :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente} \iff \alpha > 1}$$

2. Un développement limité en 0 à l'ordre 2 donne :

$$\boxed{(1+x)^\beta = 1 + \beta x + \frac{\beta(\beta-1)}{2} x^2 + o(x^2)}$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \right) - \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$$

1. On a quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} A_n - A_{n-1} &= \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\left[n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{n^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \right] \\ A_n - A_{n-1} &= \frac{1}{n^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left[\frac{1-\alpha}{n} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \end{aligned}$$

et enfin :

$$\boxed{A_n - A_{n-1} = -\frac{\alpha}{2} \frac{1}{n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)}$$

2. Le terme général de la série $\sum \left(A_n - A_{n-1}\right)$ est donc équivalent à $-\frac{\alpha}{2} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente (à termes < 0). On conclut :

$$\boxed{\text{la série } \sum \left(A_n - A_{n-1}\right) \text{ converge}}$$

3. On a par télescopage : $\sum_{k=2}^{n} (A_k - A_{k-1}) = A_n - A_1$, ce qui ramène la convergence de la suite (A_n) à la convergence de la suite des sommes partielles de la série précédente. Donc :

$$\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n\in} \text{ est convergente}}$$

On note L sa limite.

4. On a donc :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \right) - \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} \underset{n\to\infty}{\to} L$$

d'où :

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}{\dfrac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}} - 1 \to 0$$

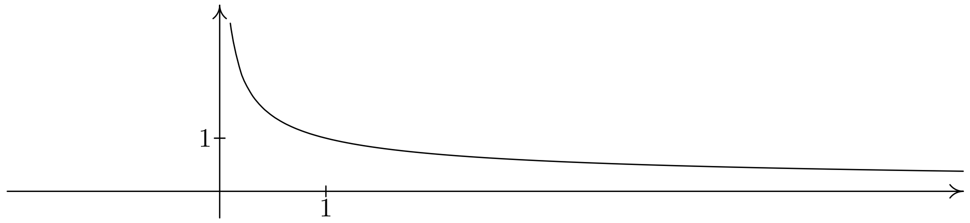
et par suite :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

On donne la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. On note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1. La série $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 1/2 \leqslant 1$, donc elle diverge.
2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est clairement continue, décroissante, et de limite $+\infty$ en 0, et nulle à l'infinie. Elle possède donc l'allure suivante :



3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{d}t$$

Et après calcul :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

4. Une sommation de l'inégalité de droite donne :

$$\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = u_n$$

et par télescopage :

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant u_n$$

De plus, en utilisant l'inégalité de gauche avec un décalage d'indice :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

et par télescopage :

$$u_n - 1 \leqslant 2\sqrt{n}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n} + 1}$$

En utilisant cette dernière inégalité, on encadre alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{u_n}{2\sqrt{n}} \leqslant 1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Et le théorème des gendarmes donne $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{2\sqrt{n}} = 1$. D'où :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$$

5. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) - 2\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) \\
S_{n+1} - S_n &= -\frac{1}{4n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_{n+1} - S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n\sqrt{n}}}$$

6. La série $\sum(S_{n+1} - S_n)$ est convergente car son terme général (négatif) équivaut au signe près à celui d'une série de Riemann convergente. Ainsi, la suite (S_n) converge vers une limite C, ce qui s'écrit aussi :

$$S_n = u_n - 2\sqrt{n} = C + o(1)$$

On peut conclure :

$$\boxed{\text{Il existe une constante } C \text{ telle que } u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} + C + o(1).}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Remarquons que cette série est à termes positifs puisque $\frac{n+3}{n+2} \geqslant 1$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{1+3/n}{1+2/n}\right) = \ln\left(1+\frac{3}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on en déduit que :

$$\boxed{\sum \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \text{ diverge.}}$$

2. Il est clair que cette série est à termes positifs. de plus :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!} \times \frac{(3n)!}{(n!)^3} \\
&= \frac{((n+1)n!)^3 \times (3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!(n!)^3} \\
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{27n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{27}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{27} < 1$. D'après la règle de D'Alembert, on conclut :

$$\boxed{\sum \frac{(n!)^3}{(3n)!} \text{ converge.}}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$.

1. (a) Montrons que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. C'est un raisonnement classique par récurrence :
   - ⋆ Pour $n = 0$ le résultat est vrai car $u_0 = 0 \in [0,1]$.
   - ⋆ Si le résultat est vrai au rang n fixé, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc successivement :
$$0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1, \text{ puis } 0 \leqslant u_n^2 + 1 \leqslant 2, \text{ et enfin } 0 \leqslant \frac{u_n^2+1}{2} = u_{n+1} \leqslant 1.$$
     Ainsi le résultat est vrai au rang $n+1$.

   En conclusion, on a par récurrence :
$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n : 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$$

   (b) Pour étudier les variations de la suite (u_n), il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geqslant 0$$
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

   (c) Résumons : la suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite ℓ. On a bien sûr $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, et la relation de récurrence entraîne :
$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2+1}{2}, \text{ c'est à dire } \ell = \frac{\ell^2+1}{2}.$$
   où encore $0 = \dfrac{\ell^2 - 2\ell + 1}{2} = \dfrac{(\ell-1)^2}{2}$. La seule limite possible est $\ell = 1$.
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 1.}$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 1$.

   (a) Simplifions pour $k \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= (u_{k+1} - 1) - (u_k - 1) = u_{k+1} - u_k \\ &= \frac{(u_k-1)^2}{2} \quad \text{d'après le calcul fait en 1b.} \end{aligned}$$
   On reconnaît ainsi la relation :
$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k, \text{ exprimer } v_{k+1} - v_k = \frac{v_k^2}{2}}$$

   (b) Par un télescopage, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0$$
   avec $v_0 = u_0 - 1 = -1$.
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n + 1}$$

   (c) D'après la question 2a, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} v_k^2, \quad \text{c'est à dire : } \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_k^2 = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$$
   D'après la question 2b, on a alors :
$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k^2 = 2(v_n + 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$
   car la suite v_n converge vers 0. En conclusion :
$$\boxed{\text{La série de terme général } v_n^2 \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

I. Dans cette question, on cherche à établir le critère de Cauchy pour les séries numériques :

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell, \text{ alors : } \begin{cases} \ell < 1 \implies \text{La série } \sum u_n \text{ converge.} \\ \ell > 1 \implies \text{La série } \sum u_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

On suppose donc que (u_n) est une série à termes > 0 tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

1. On rappelle que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |\sqrt[n]{u_n} - \ell| \leqslant \varepsilon}$$

ce qui revient aussi à :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon$$

2. On suppose que $\ell < 1$. Soit $r \in]\ell, 1[$ fixé :

(a) En prenant $\varepsilon = r - \ell > 0$, on a bien le résultat :

$$\boxed{\text{Il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour } n \geqslant N, \text{ on a } \sqrt[n]{u_n} \leqslant r.}$$

(b) Il vient immédiatement que pour $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant r^n$.
Or la série $\sum r^n$ est une série géométrique convergente (car $|r| = r < 1$), donc par le théorème de majoration du terme général d'une série positive :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

3. On suppose que $\ell > 1$. En prenant $\varepsilon = \ell - 1 > 0$, on a bien le résultat :

$$\boxed{\text{Il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour } n \geqslant N, \text{ on a } \sqrt[n]{u_n} \geqslant 1.}$$

Le terme général de la série $\sum u_n$ ne tend pas vers 0 donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

4. La série $\sum u_n = \sum \left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^{2n}$ est à termes strictement positifs, et :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{u_n} &= \left[\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{2n\times\frac{1}{n}} = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1+1/n}{2+3/n}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1 \end{aligned}$$

On conclut avec le critère de Cauchy vu plus haut :

$$\boxed{\text{La série } \sum \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{2n} \text{ est convergente.}}$$

II. Soit $\alpha \geqslant 0$. On veut étudier la série $\sum u_n$ avec $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}$.

1. Lorsque $\alpha = 0$, on a $u_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \alpha = 0, \text{ la série } \sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

2. Lorsque $\alpha = 2$, on a $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{u_n} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\frac{n}{n+1}} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-1+o(1)} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{e} < 1$. D'après le critère de Cauchy :

$$\boxed{\text{Si } \alpha = 2, \text{ la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Remarquons ensuite que pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in]0, +\infty[$ avec $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n^{\alpha_2} \geqslant n^{\alpha_1}, \text{ donc } \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{\alpha_2}} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{\alpha_1}} \text{ car } \frac{n}{n+1} \in]0, 1[.$$

En particulier, lorsque $\alpha \geqslant 2$:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{\alpha}} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2}}$$

D'après la question précédente et le théorème de majoration du terme général d'une série positive, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Si } \alpha \geqslant 2, \text{ la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

3. Lorsque $\alpha = 1$ on a, par le même calcul que ci-dessus :

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-1+o(1)}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{e} \neq 0$. Le terme général de la série ne tend pas vers 0, et on conclut :

$$\boxed{\text{Si } \alpha = 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

De même qu'à la question précédente, on trouve pour $0 < \alpha \leqslant 1$:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{\alpha}}$$

Puisque la série $\sum \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$ diverge, la contraposée du théorème de majoration du terme général d'une série positive permet de conclure :

$$\boxed{\text{Si } 0 < \alpha \leqslant 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

4. Dans cette question, on suppose $1 < \alpha < 2$.
   (a) On va ici encore utiliser un développement limité :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{\alpha}} = e^{-n^{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{-n^{\alpha}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{-n^{\alpha-1}} e^{\frac{1}{2}n^{\alpha-2}+o(n^{\alpha-2})} \end{aligned}$$

   Puisque $\alpha \in]1, 2[$, on a $\frac{1}{2}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}n^{\alpha-2}+o(n^{\alpha-2})} = 1$. Ainsi :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n^{\alpha-1}}}$$

   (b) Or, sachant que $\alpha - 1 > 0$, on a par croissances comparées :

$$n^2 e^{-n^{\alpha-1}} = \frac{n^2}{(e^n)^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Autrement dit :

$$\boxed{\text{Quand } n \to +\infty, \text{ on a } e^{-n^{\alpha-1}} = o\left(\tfrac{1}{n^2}\right).}$$

   (c) La série $\sum u_n$ est une série à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc par le théorème de majoration du terme général, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Si } 1 < \alpha < 2, \text{ la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que le *produit infini* $\prod a_n$ converge s'il existe $\ell \in \mathbb{R}^*$ tel que la suite de terme général

$$\prod_{k=0}^{n} a_k \text{ converge vers } \ell.$$

Dans ce cas, on note $\ell = \prod_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1. On suppose que le *produit infini* $\prod a_n$ converge vers $\ell \neq 0$. Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ car si ce n'était pas le cas, la suite de terme général $\prod_{k=0}^{n} a_k$ serait nulle à partir d'un certain rang et convergerait vers 0, ce qui n'est pas possible car $\ell \neq 0$.

   D'autre part, les suites $\prod_{k=0}^{n} a_k$ et $\prod_{k=0}^{n-1} a_k$ convergent vers la même limite ℓ, et on peut écrire :

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n} a_k}{\prod_{k=0}^{n-1} a_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1$$

$$\boxed{\text{Si le } \textit{produit infini } \prod a_n \text{ converge, alors } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} a_n = 1.}$$

   On pose désormais $a_n = 1 + u_n$ et on suppose par la suite que $a_n > 0$ pour tout entier n.

2. (a) Par les propriétés du logarithme, on constate la relation :

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(a_k)$$

   Il est donc immédiat de constater que si la suite $\prod_{k=0}^{n} a_k$ converge vers $\ell > 0$ alors la somme $\sum_{k=0}^{n} \ln(a_k)$ converge vers $\ln \ell$. Réciproquement, si la série $\sum \ln(a_n)$ converge vers ℓ', alors la suite $\prod_{k=0}^{n} a_k$ converge vers $e^{\ell'} > 0$. En résumé :

$$\boxed{\text{Le produit } \prod a_n \text{ converge si et seulement si la série } \sum \ln(a_n) \text{ converge.}}$$

   Dans ce cas, on a la relation :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{+\infty} a_k = \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(a_k)\right)}$$

   Pour les questions suivantes, on peut remarquer que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n - 1 = 0$$

   (b) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n > 1$. La série $\sum \ln(a_n) = \sum \ln(1 + u_n)$ est une série à termes positifs. De plus :

$$\ln(1 + u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

   Donc les séries $\sum \ln(1 + u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature. On conclut avec la question 2a :

$$\boxed{\text{Si } \forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n > 1, \text{ le produit } \prod a_n \text{ converge si et seulement si la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

   (c) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \in [0, 1[$. C'est le même raisonnement que précédemment en constatant cette fois que la série $\sum \ln(a_n) = \sum \ln(1 + u_n)$ est une série à termes négatifs :

$$\boxed{\text{Si } \forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \in [0,1[\text{ le produit } \prod a_n \text{ converge si et seulement si la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

(d) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \in]0,+\infty[$. La série $\sum u_n$ n'est donc plus nécessairement de signe constant. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors la série $\sum |u_n|$ converge. Or :

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |\ln(1+u_n)|$$

Ainsi la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge absolument donc converge. D'après la question 2a, on conclut :

$$\boxed{\text{Si la série } \sum u_n \text{ converge absolument, alors le produit } \prod a_n \text{ converge.}}$$

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$:

⋆ Pour $n=2$, on a :

$$\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\times 2}$$

donc la relation est vérifiée.

⋆ On suppose le résultat vrai au rang n fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\times\frac{n+1}{2n} \quad \text{par l'hypothèse de récurrence.} \\
&= \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\times\frac{n+1}{2n} = \frac{n^2+2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi vrai au rang $n+1$.

Par récurrence, on a :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 2 : \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}}$$

Il reste à calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+1/n}{2} = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}}$$

4. D'après la question 2c, le produit $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum -\frac{2}{n(n+1)}$ converge.

Or :

$$\frac{2}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$$

Comme la série $\displaystyle\sum -\frac{1}{n^2}$ est convergente (d'après Riemann), on en déduit que la série $\displaystyle\sum -\frac{2}{n(n+1)}$ converge.

D'où :

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right) \text{ converge.}}$$

Pour le calcul, on peut considérer les produits partiels ou les sommes partielles avec 2a (c'est le même principe). Par exemple :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\times\prod_{k=2}^{n}\frac{k+2}{k+1} = \frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k+2}{k+1}}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1}}
\end{aligned}$$

On reconnaît deux télescopages, c'est à dire :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\frac{\frac{n+2}{3}}{\frac{n}{1}}=\frac{1+2/n}{3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{3}$$

En conclusion :

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}}$$

5. Dans cette question, on cherche à étudier le produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

On rappelle le théorème suivant concernant toute suite réelle (v_n) :

$$\boxed{\text{Si } (v_{2n}) \text{ et } (v_{2n+1}) \text{ ont la même limite } \ell, \text{ alors } (v_n) \text{ converge vers } \ell.}$$

On notera $P_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

(a) On calcule simplement pour $k\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right) &= 1-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k(2k-1)}\\ &= 1+\frac{-2k+1+2k-1}{2k(2k-1)}=1\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}P_{2n} &= \prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=\prod_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)\times\prod_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\times\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\\ P_{2n} &= \prod_{k=1}^{n}\left[\left(1-\frac{1}{2k}\right)\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\right]=\prod_{k=1}^{n}1=1\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad P_{2n}=1}$$

(b) D'autre part :

$$P_{2n+1}=\prod_{k=1}^{2n+1}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=\left(1+\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=\frac{2n+2}{2n+1}P_{2n}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad P_{2n+1}=\frac{2n+2}{2n+1}P_{2n}=\frac{2n+2}{2n+1}}$$

(c) Il est clair que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}P_{2n}=1$, donc la suite (P_n) converge vers 1.

$$\boxed{\text{Le produit } \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \text{ converge et vaut } 1.}$$

(d) La réciproque de la question 2d est fausse puisque le produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ converge mais la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ne converge pas absolument (car $\sum\frac{1}{n}$ diverge).

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose pour tout $p\in\mathbb{N}$: $S_p=\sum_{k=1}^{n}k^p$. On a bien sûr $S_0=n$ et on sait que $S_1=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. On a : $\forall k \in \mathbb{N},\ \ (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, et on somme pour $k = 1, .., n$ pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

c'est-à-dire en constatant un télescopage :

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

D'où le résultat :

$$\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

2. On a de même :

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$$

puis :

$$(n+1)^5 - 1 = 6S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 6S_1 + n$$

ce qui donne après calculs :

$$\boxed{S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

et enfin de la même façon on obtient :

$$\boxed{S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$

3. Il est immédiat que pour $p = 0, 1, 2, 3, 4$, on a :

$$\boxed{S_p \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. (a) Très simplement, on écrit :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \alpha \ln(n+1) - \alpha \ln n + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+a) + \ln(n+b) - \ln(n+c) - \ln(n+d) \\
&= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{b}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{c}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{d}{n}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant le développement limité avec « grand O »de $\ln(1+u) = 1 + u + O(u^2)$ en 0, on obtient :

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = \frac{a+b-c-d+\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

(b) On sait que la suite (v_n) est de même nature que la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$. D'après la question précédente, deux cas se présentent :

— Si $\alpha \neq c+d-a-b$, alors $(v_{n+1}-v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a+b-c-d+\alpha}{n}$. Puisque $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ diverge.

— Si $\alpha = c+d-a-b$, alors $(v_{n+1}-v_n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, alors $\sum_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ converge.

En résumé :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge donc si et seulement si } \alpha = c+d-a-b.}$$

2. Puisque $u_n = \dfrac{e^{v_n}}{n^\alpha}$, on en déduit par composition des limites :

$$u_n \sim \frac{e^\ell}{n^\alpha}$$

Le terme général de la série $\sum u_n$ est équivalent au terme général d'une série de Riemann (qui converge ssi $\alpha > 1$), donc ces deux séries sont de même nature :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge si et seulement si } c+d > 1+a+b$$

3. On pose $u_n = \dfrac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3} > 0$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(3n+3)!}{3^{3n+3}((n+1)!)^3} \times \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{3^3(n+1)^3} = \frac{(n+1)(n+2/3)(n+1/3)}{(n+1)^3} = \frac{(n+2/3)(n+1/3)}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Dans ce cas précis, on remarque que $c+d = 2 = 1+a+b$, donc la série diverge.

4. Lorsque $u_0 = 1$, $a = 1, b = 3, c = 2$ et $d = 4$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+4)}$$

On peut retrouver le terme général de la suite (u_n) par une technique de télescopage de produits :

$$\frac{u_n}{u_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)(k+4)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_0}{a_n} \quad \text{avec } a_k = (k+1)(k+3)$$

Finalement $u_n = \dfrac{3}{(n+1)(n+3)}$. Une décomposition en éléments simples donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$$

On sépare alors cette somme en deux sommes de séries convergentes de façon à faire apparaître des télescopages :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

On désigne par r un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

1. (a) En considérant la valeur absolue du terme général on a :

$$|u_n(r)| = |r|^n |\cos(n\theta)| \leqslant |r|^n$$

Nous avons ainsi majoré en valeur absolue le terme général de notre série par le terme général d'une série géométrique convergente (car $0 < r < 1$). On en déduit que notre série est absolument convergente, donc que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n(r) = r^n\cos(n\theta) \text{ converge.}}$$

(b) Pour calculer la somme de la série, commençons par remarquer que

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta})$$

ce qui permet de décomposer notre série en somme de deux séries absolument convergentes (car $|e^{\pm in\theta}r^n| = |r|^n$) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{-in\theta}$$

On reconnaît des sommes de séries géométriques :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(re^{i\theta})^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(re^{-i\theta})^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{1}{1-re^{-i\theta}}\right)\end{aligned}$$

Il faut encore exprimer le résultat sous forme réelle :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2-r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2-2r\cos(\theta)}{1-r(e^{i\theta}+re^{-i\theta})+r^2}\right)\end{aligned}$$

Après une dernière simplification, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1-r\cos(\theta)}{1-2r\cos(\theta)+r^2}}$$

2. On pose $f(r,\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}$.

   (a) Soit $r \in]0,1[$ et θ réel. Il est immédiat de constater que l'expression $f(r,\theta)$ existe si et seulement si son dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire :

   $$1-2r\cos(\theta)+r^2 \neq 0$$

   Il s'agit ici d'un trinôme du second degré en r dont le discriminant est :

   $$\Delta = 4(\cos^2(\theta)-1) = -4\sin^2(\theta)$$

   Il est clair que ce discriminant est nul si et seulement si $\sin(\theta)=0$ ou encore $\cos(\theta)=\pm 1$. Le trinôme s'écrit dans ce cas :

   $$1 \pm 2r + r^2 = (1\pm r)^2 \neq 0 \quad \text{car } r \neq 1$$

   On peut donc en déduire que le trinôme ne s'annule jamais, ce qui entraîne que :

   $$\boxed{f(r,\theta) \text{ existe pour tout } r \in]0,1[\text{ et tout } \theta \text{ réel.}}$$

   (b) D'autre part, un calcul simple utilisant le résultat trouvé en 1b donne :

   $$\begin{aligned}1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) &= -1+2\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) \\ &= -1+\frac{2-2r\cos(\theta)}{1-2r\cos(\theta)+r^2} \\ 1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) &= \frac{-1+2r\cos(\theta)-r^2+2-2r\cos(\theta)}{1-2r\cos(\theta)+r^2}\end{aligned}$$

   Donc après simplifications :

   $$\boxed{\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} = -1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta).}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

On considère la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}$.

1. Commençons par remarquer que la série est à termes positifs puis, avec $3^k-2^k \underset{k\to+\infty}{\sim} 3^k$ et $3^{k+1}-2^{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} 3^{k+1}$:

$$\frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{6^k}{3^{k+1}\times 3^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{6^k}{3\times 9^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

   Par équivalence avec le terme général d'une série géométrique convergente :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geqslant 1} \frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)} \text{ est convergente.}}$$

2. Un calcul (légèrement) fastidieux donne :

$$\begin{aligned}\frac{2\times 2^k-3^k}{3^k-2^k}-\frac{2\times 2^{k+1}-3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}} &= \frac{(2\times 2^k-3^k)(3^{k+1}-2^{k+1})-(2\times 2^{k+1}-3^{k+1})(3^k-2^k)}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}\\ &= \frac{(8\times 6^k-4\times 4^k-3\times 9^k)-(7\times 6^k-4\times 4^k-3\times 9^k)}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}\end{aligned}$$

   En simplifiant, il vient pour $k\geqslant 1$:

$$\boxed{\frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)} = \frac{2\times 2^k-3^k}{3^k-2^k}-\frac{2\times 2^{k+1}-3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}}$$

3. Il est évident qu'on a affaire à un télescopage, puisqu'en posant $a_k=\dfrac{2\times 2^k-3^k}{3^k-2^k}$, on a :

$$\frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)} = a_k-a_{k+1}$$

   Considérons en conséquence les sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)} = \sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1}) = a_1-a_{n+1}$$

   Il reste à effectuer la limite en $+\infty$, tout en remarquant que :

$$a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-3^k}{3^k} = -1 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1$$

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)} = a_1+1 = 2$$

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 1}\frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)} = 2}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

Dans cet exercice, on pose :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad\text{et}\qquad u_n=S_{n-1}-\ln n.$$

1. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $x_n=\dfrac{1}{n}+\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

(a) Transformons un peu l'écriture :

$$x_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Après simplification :

$$\boxed{x_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

(b) Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \geqslant 0$ et puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, alors :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} x_n \text{ converge.}}$$

2. (a) $u_{n+1} - u_n = S_n - \ln(n+1) - \big(S_{n-1} - \ln n\big) = S_n - S_{n-1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = x_n}$$

(b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ sont de même nature. En effet, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$$

Puisque la série converge d'après 1b, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge.}}$$

Enfin, du fait que la suite (u_n) converge, on a :

$$S_n = u_{n+1} + \ln(n+1) = u_{n+1} + \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$$

Correction de l'exercice 17 ▲

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques séries par comparaison avec une intégrale :

1. *La série* $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. On se propose de montrer que cette série converge.

On pose pour $n \geqslant 3$, $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$, et $U_n = \sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.

(a) Le changement de variable $u = \ln t$ donne :

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln x}$$

$$\boxed{\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}}$$

(b) Soit $k \geqslant 3$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(t\ln t)^2}$ est décroissante sur $[k-1, k]$, et on peut donc écrire :

$$\forall t \in [k-1,k], \quad 0 \leqslant \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \frac{1}{t(\ln t)^2}$$

L'inégalité se conserve par passage à l'intégrale, d'où :

$$0 \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k(\ln k)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{k-(k-1)}{k(\ln k)^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t(\ln t)^2}$$

Concluons :

$$\boxed{\forall k \geqslant 3, \quad 0 \leqslant \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}}$$

(c) Par sommation, on trouve pour n entier $\geqslant 3$:

$$U_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \int_{2}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$$

Donc d'après le calcul effectué à la question 1a :

$$U_n \leqslant \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$$

Puisque, pour tout entier $n \geqslant 3$ on a $\frac{1}{\ln n} \geqslant 0$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant 3, \quad U_n \leqslant \frac{1}{\ln 2}}$$

La série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est une série à termes positifs, dont on vient de voir que la suite (U_n) des sommes partielles est majorée. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n(\ln n)^2} \text{ converge.}}$$

2. *La série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n}$.

(a) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n}$ est une série à termes positifs, et de plus pour $n \geqslant 3$, on a :

$$\ln n \geqslant \ln e = 1, \quad \text{donc :} \quad \frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

Puisque la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, on en conclut par cette minoration que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n} \text{ diverge.}}$$

(b) Soit $x \geqslant 1$, on a :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

Si on ne reconnaît pas immédiatement la primitive, le changement de variable $u = \ln t$ fait l'affaire. Au final :

$$\boxed{\text{Pour } x \geqslant 1, \text{ on a } \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln x)^2.}$$

(c) La fonction $t \mapsto f(t) = \frac{\ln t}{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty]$ et :

$$\forall t \in]0, +\infty], \ \ f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

avec $1 - \ln t = 0$ si et seulement si $t = e$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \frac{\ln t}{t} \text{ est croissante sur }]0, e] \text{ et décroissante sur } [e, +\infty[.}$$

La limite de cette fonction est $-\infty$ en 0, et 0 en $+\infty$, ce qui nous permet de la représenter :

(d) Soit $k \geqslant 3$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \qquad \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \frac{\ln t}{t} \leqslant \frac{\ln k}{k}$$

Par passage à l'intégrale, il vient :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(k+1)}{k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln(k+1)}{k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln k}{k}$$

Après calcul :

$$\boxed{\forall k \geqslant 3, \quad \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k}}$$

Pour $k \geqslant 4$, on conserve l'inégalité de droite et on fait un décalage d'indice $k \to k-1$ dans celle de gauche pour obtenir :

$$\boxed{\forall k \geqslant 4, \quad \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t}$$

(e) Par une sommation de 4 jusqu'à n :

$$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_3^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Puisque $V_n = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} + \displaystyle\sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k}$, on en déduit immédiatement :

$$\boxed{\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant V_n \leqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_3^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t}$$

(f) Avec le calcul effectué en 2b, on obtient l'encadrement :

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2}\big(\ln(n+1)\big)^2 - \frac{1}{2}(\ln 4)^2 \leqslant V_n \leqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

Le terme de droite des inégalités est clairement équivalent à $\dfrac{1}{2}(\ln n)^2$. C'est aussi le cas du terme de gauche puisque :

$$\frac{1}{2}\big(\ln(n+1)\big)^2 = \frac{1}{2}\big(\ln n + \ln(1+1/n)\big)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

V_n est encadré par deux termes équivalents au voisinage de $+\infty$. On en conclut que :

$$\boxed{V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}}$$

Remarque : c'est une variante immédiate du théorème des gendarmes, qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n}{\frac{1}{2}(\ln n)^2} = 1$.

(g) On pose $W_n = V_n - \dfrac{(\ln n)^2}{2}$.

i. On calcule pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} W_n - W_{n-1} &= V_n - \frac{(\ln n)^2}{2} - \left(V_{n-1} - \frac{(\ln(n-1))^2}{2}\right) \\ &= \frac{\ln n}{n} - \left(\frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln(n-1))^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Or, on a vu à la question 2b que $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{(\ln t)^2}{2}$. Il est donc possible d'écrire :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad W_n - W_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t}$$

ii. On peut encore transformer l'écriture puisque $\dfrac{\ln n}{n} = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \dfrac{\ln n}{n}\,\mathrm{d}t$:

$$W_n - W_{n-1} = \int_{n-1}^{n} \left[\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln t}{t}\right] \mathrm{d}t$$

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$, on en déduit que pour $n \geqslant 4$, on a :

$$\forall t \in [n-1, n], \quad \frac{\ln t}{t} \geqslant \frac{\ln n}{n}, \quad \text{d'où :} \quad \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln t}{t} \leqslant 0$$

Par passage à l'intégrale, on en déduit que pour $n \geqslant 4$, on a $W_n - W_{n-1} \leqslant 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (W_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante.}}$$

De plus d'après la question 2f, on a pour $n \geqslant 4$:

$$W_n \geqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} - \frac{1}{2}(\ln 4)^2 + \underbrace{\frac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{2} - \frac{(\ln n)^2}{2}}_{\geqslant 0}$$

Ainsi $W_n \geqslant \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} - \dfrac{1}{2}(\ln 4)^2$.
La suite (W_n) est décroissante et minorée, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La suite } (W_n) \text{ est convergente.}}$$

(h) Si on note C la limite de la suite (W_n), on a immédiatement $W_n = C + o(1)$, d'où :

$$\boxed{V_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)}$$

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Pour le calcul de u_n, il suffit d'appliquer la méthode classique pour une fraction rationnelle (se ramener en premier lieu à une fraction dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur) :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t}{t+n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t+n-n}{t+n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\int_0^1 \left(1 - \frac{n}{t+n}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Il reste alors à primitiver le résultat obtenu :

$$u_n = \frac{1}{n}\Big[t - n\ln(t+n)\Big]_0^1 = \frac{1}{n}\left(1 - n\ln(n+1) - n\ln n\right)$$

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

À l'aide de cette expression, il est facile d'effectuer un développement limité :

$$u_n = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Ce développement nous permet d'écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$. Le terme général de la série $\sum u_n$ est donc équivalent (à un coefficient près) au terme général d'une série de Riemann convergente, donc :

$$\boxed{\text{La série } \textstyle\sum u_n \text{ converge.}}$$

2. À l'aide de l'expression trouvée à la question précédente, on peut expliciter S_n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k)$$

On reconnaît alors un télescopage qui donne finalement :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)}$$

Cette expression trouvée peut également s'écrire :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = S}$$

3. Soit $n \geqslant 2$. Pour $t \in [0;1]$, on a :

$$\frac{t}{1+n} \leqslant \frac{t}{t+n} \leqslant \frac{t}{n} \leqslant \frac{t}{n-1}$$

Donc à l'aide de la conservation des inégalités par passage à l'intégrale entre 0 et 1, on a :

$$\frac{1}{1+n}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t}{t+n}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n-1}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

Soit, en multipliant les inégalités par $\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n(n+1)}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t}{t+n}\,\mathrm{d}t = u_n \leqslant \frac{1}{n(n-1)}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

Nous n'avons plus qu'à calculer $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et à remarquer que :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \qquad \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

pour obtenir l'inégalité (valable pour $n \geqslant 2$) :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)}$$

Cette inégalité nous permet d'obtenir un encadrement du reste de la série $R_n = S - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, en remarquant que pour $p \geqslant n+1$, on a :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{p}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} u_k \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{p}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

puis, en simplifiant l'encadrement à l'aide d'un télescopage :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} u_k \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)$$

enfin, en utilisant le fait que les inégalités larges se conservent par passage à la limite lorsque $p \to +\infty$:

$$\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leqslant S - S_n \leqslant \frac{1}{2n}}$$

4. Il faut prendre garde ici que la question est plus subtile qu'il n'y paraît. En effet, si on veut approcher S par S_n à 10^{-2} près il suffit, d'après l'encadrement qui précède, d'avoir

$$\frac{1}{2n} \leqslant 10^{-2}, \text{ et donc : } n \geqslant 100/2 = 50.$$

Donc à partir du $50^{ème}$ terme, l'évaluation sera suffisamment précise (ce qui est long !). Ce n'est évidemment pas ce qui est suggéré par l'énoncé. En fait, l'inégalité nous donne :

$$0 \leqslant S - S_n - \frac{1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}$$

Il s'agit donc d'approcher S par la suite $n \mapsto S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. La précision sera de 10^{-2} si :

$$\frac{1}{2n(n+1)} \leqslant 10^{-2} \text{ c'est à dire : } \quad n(n+1) \geqslant 50$$

On remarque que la suite $n \mapsto n(n+1)$ est strictement croissante, et que $6(6+1) = 42 < 50$ alors que $7(7+1) = 56 > 50$. Donc :

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 7, \text{ on obtient une approximation de } S \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

Remarque : il ne faut toutefois pas s'extasier devant cette méthode d'approximation de γ. En effet, si on cherche une valeur approchée à 10^{-6} près, il faut $n(n+1) \geqslant 500000$ soit $n \geqslant 707$, ce qui représente beaucoup d'opérations.

Correction de l'exercice 19 ▲

Le but de cet exercice est de déterminer un développement asymptotique de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Un équivalent de H_n**

   Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Soit k est un entier non nul. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $[k, k+1]$. d'où l'encadrement :

   $$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

   L'intégration sur l'intervalle $[k, k+1]$ conserve les inégalités, donc :

   $$\frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \int_k^{k+1} \mathrm{d}t$$

   Après calculs, on obtient ainsi :

   $$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}}$$

   (b) Il est alors possible d'effectuer une sommation pour $n \geqslant 2$ et k compris entre 1 et $n-1$:

   $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

   Celle-ci permet de reconnaître la somme H_n des deux côtés des inégalités. Au milieu, on utilise la relation de Chasles :

   $$H_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln n \leqslant H_n - \frac{1}{n}$$

   On en déduit immédiatement l'encadrement suivant :

   $$\boxed{\ln n + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln n + 1}$$

(c) Cette double inégalité devient, en divisant par $\ln n$:

$$1+\frac{1}{n\ln n}\leqslant\frac{H_n}{\ln n}\leqslant 1+\frac{1}{\ln n}$$

Le théorème des gendarmes assure enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{H_n}{\ln n}=1$, ce qui équivaut à :

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$$

2. **Suites adjacentes**

Soit deux suites de réels (v_n) et (w_n) adjacentes c'est à dire que :

$$(v_n) \text{ est croissante, } (w_n) \text{ est décroissante, et } \lim_{n\to+\infty}(v_n-w_n)=0.$$

(a) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-w_n)=0$, ce qui se reformule avec la définition connue de la limite d'une suite :

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists N\in\mathbb{N},\ \ \big(n\geqslant N\Longrightarrow |v_n-w_n|\leqslant\varepsilon\big)$$

Pour le choix $\varepsilon=1$, il existe donc $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geqslant n_0$:

$$|v_n-w_n|\leqslant 1 \ \text{ ou encore : } w_n-1\leqslant v_n\leqslant w_n+1$$

Soit en particulier :

$$\boxed{\text{Il existe un entier naturel } n_0 \text{ tel que, pour tout entier } n\geqslant n_0,\ v_n\leqslant w_n+1.}$$

La suite (w_n) est décroissante donc majorée par son premier terme w_0. Il vient que pour tout entier $n\geqslant n_0$, on a $v_n\leqslant w_n+1\leqslant w_0+1$, ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est majorée.}}$$

(b) De même, la suite (v_n) est croissante donc minorée par son premier terme v_0. Il vient que pour tout entier $n\geqslant n_0$, on a $w_n\geqslant v_n-1\geqslant v_0-1$, ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est minorée.}}$$

(c) La suite (v_n) est croissante et majorée, donc converge vers une limite α. La suite (w_n) est décroissante et minorée, donc converge vers une limite β. Or :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n-w_n=0=\alpha-\beta$$

ce qui prouve que $\alpha=\beta$ et en résumé :

$$\boxed{\text{Les suites } (v_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.}}$$

3. **Constante d'Euler**

On pose, pour $n\geqslant 1$, $c_n=H_n-\ln n$ et $d_n=c_n-\dfrac{1}{n}$.

(a) Il suffit dans cette question de reprendre l'encadrement de la question 1a pour $n\geqslant 1$:

$$\frac{1}{n+1}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\big[\ln t\big]_n^{n+1}\leqslant\frac{1}{n}$$

Il vient immédiatement après calcul de l'intégrale :

$$\boxed{\text{Pour } n\geqslant 1,\ \frac{1}{n+1}\leqslant\ln(n+1)-\ln n\leqslant\frac{1}{n}.}$$

(b) Vérifions que les suites (c_n) et (d_n) sont adjacentes :

— Tout d'abord, la suite (c_n) est décroissante car :

$$\begin{aligned} c_{n+1}-c_n &= H_{n+1}-\ln(n+1)-H_n+\ln n && (1)\\ &= \frac{1}{n+1}-\big(\ln(n+1)-\ln n\big)\leqslant 0 && (2)\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de gauche de la question qui précède.

— Ensuite, la suite (d_n) est croissante car :

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= c_{n+1} - c_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} && (3)\\ &= \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln n\big) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} && (4)\\ &= \frac{1}{n} - \big(\ln(n+1) - \ln n\big) \geqslant 0 && (5) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de droite.

— Enfin $c_n - d_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les deux suites sont donc adjacentes. On peut conclure avec la question 2 :

$$\boxed{\text{Les suites } (c_n) \text{ et } (d_n) \text{ convergent vers une même limite.}}$$

On note alors γ cette limite (γ est appelée constante d'Euler).

(c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \gamma$, on a $c_n - \gamma = o(1) = H_n - \ln n - \gamma$, et ainsi :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + o(1)}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

Partie I : Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) On a : $B_0 = \sum\limits_{k=0}^{0} b_k = b_0$ et $\forall n \geqslant 1$, $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k = B_n - B_{n-1}$. Donc :

$$\boxed{B_0 = b_0 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ b_n = B_n - B_{n-1}.}$$

(b) On utilise les relations ci-dessus pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1})\\ &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \end{aligned}$$

Puis par un décalage d'indice dans la seconde somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n - \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} B_k \end{aligned}$$

En regroupant les sommes, on a montré ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k}$$

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(a) La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc :

$$\exists M > 0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N},\ \ |B_n| \leqslant M$$

On peut donc majorer :

$$|a_n B_n| = |a_n||B_n| \leqslant M|a_n|$$

Or, la suite (a_n) convergeant vers 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} M|a_n| = 0$, et par la majoration ci-dessus :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

(b) Considérons le terme général :

$$\big|(a_k - a_{k+1})B_k\big| \leqslant |a_k - a_{k+1}| \times |B_k| \leqslant M|a_k - a_{k+1}|$$

La série $\sum |a_k - a_{k+1}|$ est convergente, donc par comparaison, la série $\sum \big|(a_k - a_{k+1})B_k\big|$ est de même nature. Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})B_n \text{ est absolument convergente.}}$$

Cette série est donc convergente. Or, l'égalité prouvée à la question 1b, et la convergence de cette série ainsi que de la suite $(a_n B_n)$ permettent de conclure que la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k\right)$ a une limite, c'est à dire :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \text{ est convergente.}}$$

3. En utilisant le fait que (a_n) est décroissante, puis un télescopage, on peut écrire que :

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

On en déduit que la suite (a_n) et la série $\sum |a_k - a_{k+1}|$ sont de même nature : cette dernière série est donc convergente. Les hypothèses de la question 2 sont ainsi vérifiées, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \text{ converge.}}$$

4. Si (a_n) décroît et tend vers 0 et si $b_n = (-1)^n$, on a $B_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$.

La suite (B_n) est donc bornée, ce qui permet d'appliquer le résultat de la question précédente. On retrouve par là le critère spécial des séries alternées :

$$\boxed{\text{Si la suite } (a_n) \text{ décroît et tend vers 0, la série } \sum (-1)^n a_n \text{ converge.}}$$

En particulier, puisque la suite $n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ décroît et tend vers 0 :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge.}}$$

On peut remarquer qu'il s'agit d'une série convergente et non absolument convergente.

Partie II : Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \ \text{ et } \ C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:
$$C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \big(\cos(kx) + i\sin(kx)\big) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} - 1$$
On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$, donc :
$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} - 1 = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$
Ce qui démontre finalement le résultat après factorisation :
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} e^{ix}}$$
Il reste à exprimer ce résultat sous forme trigonométrique afin de pouvoir distinguer la partie réelle et la partie imaginaire. En appliquant la factorisation par l'arc moitié, on obtient :
$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{e^{inx/2}(e^{-inx/2} - e^{inx/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})} e^{ix} = \frac{-2i\sin\frac{nx}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}} e^{\frac{i(n+1)x}{2}} = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} e^{\frac{i(n+1)x}{2}}$$
Puis, en prenant la partie réelle du résultat, on a :
$$C_n(x) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$
En prenant la partie imaginaire, on a de même :
$$S_n(x) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$
En résumé :
$$\boxed{\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.}$$

2. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:
$$|S_n(x)| = \frac{\left|\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}\right|}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$
Ce majorant est indépendant de n. On a donc :
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \text{ la suite } (S_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$
D'après la question 3 de la partie I, le résultat ci-dessus et le fait que la suite $n \mapsto \frac{1}{n}$ est décroissante de limite nulle prouvent que :
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n} \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$
Dans la suite, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, et on cherche à calculer la somme de cette série.

3. (a) On constate que :
$$f(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(-nx)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(nx)}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = -f(x)$$
$$f(x + 2\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx + 2n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = f(x)$$
$$\boxed{f \text{ est impaire et } 2\pi\text{-périodique.}}$$

(b) Soit $x \in]0,\pi[$. On remarque que pour $k \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(kx)}{k}$ est la primitive de $x \mapsto \cos(kx)$ qui s'annule en π. On peut donc écrire, avec le théorème fondamental de l'analyse, que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{x} \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \right) \mathrm{d}t = \int_{\pi}^{x} C_n(t)\,\mathrm{d}t$$

On peut appliquer le résultat établi à la question 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \int_{\pi}^{x} \left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}t = -\int_{x}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, après calcul on a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2} \int_{x}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t}$$

4. Soit $x \in]0,\pi[$; pour tout $t \in [x,\pi]$, on pose $h(t) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

(a) La fonction $t \mapsto \sin\frac{t}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,\pi]$ et ne s'annule pas (car $x \in]0,\pi[$), donc :

$$\boxed{h \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [x,\pi].}$$

h' étant en conséquence continue sur le segment $[x,\pi]$, il vient que :

$$\boxed{h' \text{ est bornée sur } [x,\pi].}$$

(b) Une intégration par parties permet d'écrire que :

$$\int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \left[-h(t)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}} \right]_{x}^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_{x}^{\pi} h'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t$$

La fin du calcul fournit le résultat :

$$\boxed{\int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1} \left(\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \int_{x}^{\pi} h'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \right).}$$

(c) On peut alors majorer l'intégrale du premier membre à l'aide de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned} \left| \int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \right| &\leqslant \frac{2}{2n+1} \left(\left| \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| + \left| \int_{x}^{\pi} h'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \right| \right) \\ &\leqslant \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + \int_{x}^{\pi} \left| h'(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t \right| \mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

On utilise enfin le fait que h' est bornée, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ |h'(t)| \leqslant M$:

$$\left| \int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + M(\pi - x) \right)$$

L'expression à droite de l'inégalité a clairement une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$, donc par comparaison :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = 0}$$

(d) On sait, d'après la question 3b, que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,\pi[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2} \int_{x}^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t$$

La question précédente montre ainsi par passage à la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$, que :

$$\forall x \in]0,\pi[,\ \ f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

La fonction f étant impaire, on a en conséquence :

$$\forall x \in]-\pi,0[,\ \ f(x)=-f(-x)=-\frac{\pi+x}{2}$$

Il reste à utiliser la 2π-périodicité de f :

$$\forall x \in]\pi,2\pi[,\ \ f(x)=f(x-2\pi)=-\frac{\pi+x-2\pi}{2}=\frac{\pi-x}{2}$$

Le résultat est de plus évident pour $x=\pi$: $f(\pi)=0=\dfrac{\pi-\pi}{2}$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in]0,2\pi[,\ f(x)=\frac{\pi-x}{2}.}$$

Partie III : Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

On conserve les notations de la partie précédente.

1. Soit $x\in]0,2\pi[$.
   (a) Soit (m,n) un couple d'entiers naturels tels que $1\leqslant m<n$. En utilisant une transformation d'Abel, on obtient (avec $a_p=\dfrac{1}{p}$ et $b_p=\sin(px)$) :

$$\begin{aligned}\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p} &= \frac{S_n(x)-S_m(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)(S_p(x)-S_m(x))\\ &= \frac{S_n(x)}{n}-\frac{S_m(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)S_p(x)\\ &\quad -S_m(x)\sum_{p=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)\end{aligned}$$

   Par un télescopage, on peut simplifier cette expression :

$$\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}=\frac{S_n(x)}{n}-\frac{S_m(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)S_p(x)-S_m(x)\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n}\right)$$

   et on en déduit, après simplification, que pour tout couple (m,n) d'entiers naturels tels que $1\leqslant m<n$, on a :

$$\boxed{\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}=\frac{S_n(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}S_p(x)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)-\frac{S_m(x)}{m+1}.}$$

   (b) L'inégalité triangulaire, appliquée au résultat précédent, donne :

$$\left|\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}\right|\leqslant\frac{|S_n(x)|}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}|S_p(x)|\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)+\frac{|S_m(x)|}{m+1}$$

   On peut ensuite utiliser la majoration établie à la question 2 de la partie II :

$$\left|\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}\right|\leqslant\frac{1}{n\left|\sin\frac{x}{2}\right|}+\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\sum_{p=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)+\frac{1}{(m+1)\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

   Puis, en appliquant un télescopage et le fait que $\sin\frac{x}{2}>0$ (car $x\in]0,2\pi[$) :

$$\left|\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}\right|\leqslant\frac{1}{n\sin\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{(m+1)\sin\frac{x}{2}}$$

On en déduit, après simplification, que

$$\boxed{\left|\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

La série $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(px)}{p}$ est convergente d'après la question 2 de la partie II. La somme partielle ci dessus a donc une limite lorsque n tend vers l'infini. Par passage à cette limite, on a conservation des inégalités larges, c'est à dire :

$$\boxed{\left|\sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

2. Soit $x \in]0, \pi]$. On note k la partie entière de $\frac{\pi}{x}$: $k = E\left(\frac{\pi}{x}\right)$; on a donc $k \geqslant 1$.
   (a) Remarquons que par définition de la partie entière :

$$\frac{\pi}{x} - 1 < k = E\left(\frac{\pi}{x}\right) \leqslant \frac{\pi}{x}$$

   ce qui entraîne :

$$0 \leqslant \pi - x < kx \leqslant \pi$$

   De plus, pour $1 \leqslant p \leqslant k$, on a $0 \leqslant px \leqslant kx \leqslant \pi$. On sait par ailleurs que pour $t \in [0, \pi]$, on a $0 \leqslant \sin t \leqslant t$ (une petite étude de fonction le prouve facilement), ce qui entraîne :

$$0 \leqslant \sin(px) \leqslant px \quad \text{pour } 1 \leqslant p \leqslant k$$

   En effectuant la sommation, on a :

$$\sum_{p=1}^{k} \frac{\sin(px)}{p} \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{px}{p} = \sum_{p=1}^{k} x = kx$$

   On a en résumé :

$$\boxed{0 \leqslant \sum_{p=1}^{k} \frac{\sin(px)}{p} \leqslant kx \leqslant \pi}$$

   (b) Étudions la fonction $\theta \mapsto \sin\theta - \frac{2}{\pi}\theta$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En dérivant, on a :

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad h'(\theta) = \cos\theta - \frac{2}{\pi}$$

   puis en dérivant une seconde fois :

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad h''(\theta) = -\sin\theta < 0$$

   — La fonction h' est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $h'(0) > 0$, $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, donc h' ne s'annule qu'une fois (en un nombre α) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   — La fonction h est croissante sur $[0, \alpha]$, décroissante sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, et $h(0) = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Cette fonction est donc positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   On peut conclure :

$$\boxed{\text{Si } \theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right], \text{ alors } \sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta.}$$

   (c) Soit $n \geqslant k+1$; le résultat de la question 1b permet d'écrire :

$$\left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(k+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Puisque $\frac{x}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut appliquer le résultat de la question précédente :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{x}{2} \quad \text{et :} \quad \left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(k+1)\dfrac{2}{\pi}\dfrac{x}{2}} = \frac{2}{(k+1)\dfrac{x}{\pi}}$$

On a vu que en 2a que $kx \geqslant \pi - x$, ce qui entraîne $(k+1)x \geqslant \pi$, ou encore $(k+1)\dfrac{x}{\pi} \geqslant 1$. Ainsi :

$$\boxed{\left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2}$$

3. Pour $x \in]0, \pi]$, avec les notations et les résultats précédents, l'inégalité triangulaire donne :

$$\left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \left|\sum_{p=1}^{k} \frac{\sin(px)}{p}\right| + \left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant \pi + 2$$

Ce résultat est vrai encore pour $x = 0$, puis sur $[-\pi, \pi]$ puisque la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}$ est impaire. Enfin, il reste vrai sur $\mathbb{R}$ car cette fonction est 2π-périodique.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2 + \pi}$$