

Loi de Képler – Mouvement à Force Centrale

Exercice 1 : La masse de Jupiter

La masse M de la planète Jupiter peut se déterminer à partir des données issues de l'observation de ses satellites. Les périodes T des mouvements des satellites sont en effet reliées aux rayons r de leurs orbite (supposées circulaires) par la relation :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}, \text{ avec } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI.}$$

1. Que représente G ? Exprimer l'unité de G avec les unités de base du système international.
2. Le tableau qui suit donne les valeurs de T et r relatives à quelques satellites de Jupiter. Tracer la courbe donnant r^3 en fonction de T^2 et exploiter celle-ci pour déterminer M

Satellites	Io	Europe	Ganymède	Callisto
T (jours)	1,768	3,551	7,155	16,69
r (km)	$4,220 \cdot 10^5$	$6,710 \cdot 10^5$	$10,70 \cdot 10^5$	$18,80 \cdot 10^5$

Exercice 2 : L'atome de Bohr

L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton et d'un électron. Dans le modèle de Bohr (1913) qui est un modèle planétaire, l'électron est en mouvement circulaire uniforme de rayon r autour du noyau. On néglige la force gravitationnelle devant la force électrique.

Déterminer la vitesse v de l'électron dans le référentiel du noyau, supposé immobile.

Données : Constante électrique $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ usi}$, charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, rayon de l'atome $r = 54 \text{ pm}$, masse de l'électron $m = 9,0 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Exercice 3 : Couverture des satellites géostationnaires

1. Définir ce que l'on appelle satellite géostationnaire et montrer que l'orbite d'un tel satellite est nécessairement contenue dans le plan de l'équateur terrestre.
2. Calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire.
3. Montrer qu'il n'est pas possible d'observer la totalité du globe depuis des satellites géostationnaires, et que la zone observable est située entre les latitudes $81,3^\circ \text{Sud}$ et $81,3^\circ \text{N}$

Données : $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ la masse de la Terre, Constante gravitationnelle uniforme $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ masse du soleil, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ constante universelle de gravitation, période (jour sidéral) de rotation de la Terre sur elle-même $T = 23\text{h}56\text{min}$.

Exercice 4 : Toujours plus haut

A la surface de la Terre, de masse M_T et de rayon R_T , on lance un objet verticalement et vers le haut, avec une vitesse initiale v_0 . On ne tient pas compte des frottements.

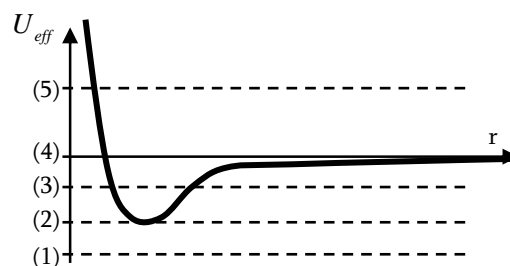
1. Exprimer l'altitude maximale H atteinte par le projectile, en fonction de R_T , v_0 et $v_1 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$.
2. Que se passe-t-il pour $v_0 = v_1$?

Exercice 5 : Satellites terrestres – Vitesse de libération

On s'intéresse dans cet exercice à quelques aspects de la satellisation de satellites terrestres. En l'absence de précision explicite, on négligera tout frottement du à l'atmosphère sur le satellite. On s'intéresse à un satellite de masse m , en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre. On donne la masse de la Terre $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, le rayon de la Terre $R_T = 6370 \text{ km}$ ainsi que la constante universelle de gravitation $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ usi}$.

1. Montrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme, et exprimer littéralement sa vitesse v_0 en fonction de G , M_T et R .
2. Faire l'application numérique pour une orbite rasante, c'est-à-dire $r = R_T$, une orbite proche pour un satellite d'observation, par exemple $h = 832 \text{ km}$ pour SPOT, et pour un satellite géostationnaire, c'est-à-dire $h = 36000 \text{ km}$. Comparer ces vitesses à la vitesse du sol du à la rotation de la Terre (on l'exprimera en fonction de la latitude λ et on la calculera à l'équateur).
3. Dans le cas d'une orbite circulaire du satellite autour de la Terre, montrer que l'énergie mécanique E_m du satellite est liée à son énergie cinétique par $E_m = -E_c$. Si l'on tient compte de la force de frottement de l'atmosphère sur le satellite, quel est l'effet de cette force de frottement sur la vitesse du satellite.
4. Pour un satellite de masse m en mouvement (quelconque) autour de la Terre, et soumis uniquement à la force gravitationnelle terrestre, l'énergie mécanique peut s'écrire de la même façon que celle d'un point matériel en mouvement rectiligne placé dans un potentiel effectif : $U_{\text{eff}}(r)$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. On écrit alors $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$, où r représente la distance du satellite au centre de la Terre.

Après avoir justifié que l'énergie mécanique E_m du satellite est une constante du mouvement, préciser pour chacune des valeurs de E , notées de (1) à (5) la nature de la trajectoire du satellite et celle de son état (libre ou lié).



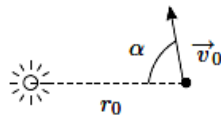
5. La vitesse de libération v_L d'un satellite est la plus petite vitesse qu'il faut communiquer à la surface de la Terre pour qu'il aille à l'infini (en se « libérant » de l'attraction terrestre). Exprimer v_L en fonction de G , M_T et R_T et calculer sa valeur.

Exercice 6 : Etude d'un astéroïde

Un astéroïde est repéré dans le système solaire. Au moment de sa découverte, il est à la distance $r_0 = 108 \text{ km}$ du centre du Soleil et a pour vitesse $v_0 = 51 \text{ km.s}^{-1}$.

Données : $M_s = 2.10^{30} \text{ kg}$ masse du soleil, $G = 6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ constante universelle de gravitation, $\alpha = 80^\circ$.

1. A quelle catégorie de conique la trajectoire de l'astéroïde appartient-elle ? Justifier.
2. En supposant que l'on puisse étendre la relation $E_m = \frac{-GM_s m}{2r}$ à la trajectoire elliptique en remplaçant le rayon r de la trajectoire circulaire par le demi-grand axe a de l'ellipse Déterminer la valeur numérique de ce demi-grand axe a de sa trajectoire.
3. En déduire la période T de l'astéroïde. La calculer en années terrestres.



Exercice 7 : Comète de 1843

En 1843, une comète est passée extrêmement près du soleil, de masse M_s : sa distance au périhélie était $d = 6,1.10^{-3} \times a_0$, où a_0 est le rayon de l'orbite terrestre. Des mesures précises ont montré que l'excentricité de la comète était $e = 1-x$ avec $x = 9,4.10^{-5}$.

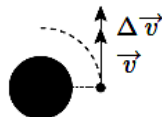
Donnée : $u = 30 \text{ km.s}^{-1}$ est la vitesse de révolution de la Terre autour du soleil.

1. Exprimer le produit GM_s en fonction de u et a_0 .
2. En considérant que la trajectoire de la comète est quasi-parabolique, calculer sa vitesse de passage v_P au périhélie.
3. Exprimer le demi-grand axe a de la trajectoire de la comète, en fonction de d et x . Calculer a en fonction de a_0 .
4. En déduire la vitesse v_A de passage à l'aphélie en fonction de v_P et x . Faire l'application numérique.
5. En quelle année cette comète reviendra-t-elle dans le système solaire ?

Exercice 8 : Apport de vitesse

Un satellite est en rotation circulaire autour de la Terre à une altitude $h = 400 \text{ km}$. Pendant un laps de temps très court, on met en marche le réacteur qui communique au satellite un supplément de vitesse, dans le sens du mouvement, de $\Delta v = 1 \text{ km.s}^{-1}$. On donne : $G = 6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$, $R_T = 6400 \text{ km}$

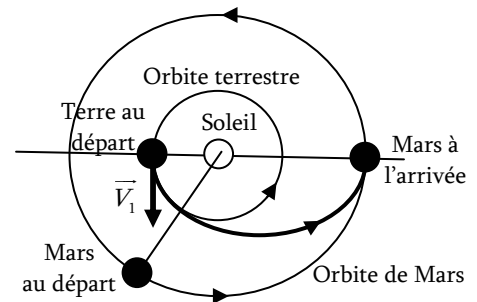
1. Calculer la vitesse v et la période T du satellite sur son orbite circulaire de départ.
2. Montrer que suite à l'allumage du réacteur, le satellite décrit une trajectoire elliptique. Calculer son demi-grand axe a (on étendra la relation $E_m = \frac{-GM_s m}{2a}$).
3. En déduire les valeurs numériques de altitudes h_P et h_A du périhélie et de l'apogée, de la nouvelle période de rotation T' du satellite et de l'excentricité e de la trajectoire elliptique suivie.



Exercice 9 : Orbite de transfert vers Mars

Dans tout le problème, on négligera les dimensions propres des astres devant les distances qui les séparent et on se placera dans le référentiel héliocentrique, sauf précision contraire.

1. La terre sur son orbite : calculer la vitesse v_T de la Terre en mouvement circulaire uniforme autour du soleil, ainsi que celle de Mars v_M .
2. Lancement d'un vaisseau vers Mars :
La manière la plus économique d'envoyer un vaisseau spatial sur Mars consiste à le placer avec une vitesse v_1 sur une orbite elliptique où il se déplace moteurs coupés sous l'effet de l'attraction solaire, en obéissant aux lois de Képler.



- 2.a) Déterminer (en UA) la valeur du demi-grand axe de l'ellipse décrite par le centre d'inertie de l'engin.
- 2.b) A l'aide de la troisième loi de Képler, déterminer la durée du voyage en années terrestres.
- 2.c) Dans le référentiel héliocentrique, la vitesse de lancement a pour valeur $v_1 = 24 \text{ km.s}^{-1}$. Sans tenir compte de l'attraction martienne, la vitesse v_2 à l'approche de Mars sera-t-elle supérieure, égale, ou inférieure à cette valeur ?
- 2.d) Pourquoi le lancement doit-il respecter certaines « fenêtres » ?
- 2.e) Pour réaliser ce transfert d'orbite, on a donc besoin de 2 poussées en P : Δv_P et en A : Δv_A (l'ellipse de transfert est tangente aux deux orbites circulaires). Déterminer l'expression des vitesses v_P et v_A du satellite sur l'ellipse de transfert respectivement aux points P (juste après l'extinction des moteurs) et A (juste avant le rallumage des moteurs). Les calculer.
- 2.f) En déduire les accroissements de vitesse orthoradiaux Δv_P et Δv_A .
- 2.g) A quelle vitesse faut-il lancer le satellite si on le lance directement depuis la Terre, tangentiellement à l'orbite de la Terre ? Dans quel sens ? Comparer cette vitesse à la vitesse de libération v_L (voir exo 5) de la Terre. Un tel lancement est-il possible tel quel ?

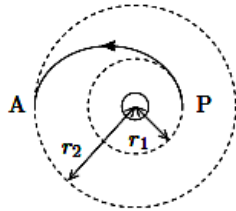
Données :

- Distance moyenne de la Terre au soleil : $d_T = 1,5.10^8 \text{ km}$,
- Distance moyenne de Mars au soleil : $d_M = 2,3.10^8 \text{ km}$.
- Unité astronomique $1 \text{ UA} = 1,5.10^8 \text{ km}$.
- Période de révolution de la planète Terre : 365,25 jours.
- Période de révolution de la planète Mars : 687 jours.

Exercice 11 : Orbite de transfert (de Hohman)

On désire réaliser le transfert d'un satellite terrestre en attente sur une orbite circulaire « basse » de rayon $r_1 = 6700\text{km}$ vers une orbite circulaire « haute » de rayon $r_2 = 42000\text{km}$ (géostationnaire), de la même manière qu'à l'exercice précédent, en passant par une orbite de transfert, dite de Hohman, tangente aux deux orbites circulaires. On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, et $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

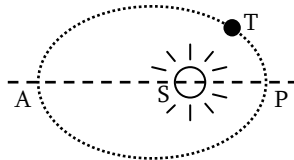
- Exprimer en fonction de r_1 et r_2 le demi grand axe de l'ellipse de transfert.
- Exprimer et calculer les vitesses v_1 et v_2 du satellite sur les orbites circulaires de rayons respectifs r_1 et r_2 .
- Déterminer l'expression des vitesses v_P et v_A du satellite sur l'ellipse de transfert respectivement aux points P (juste après l'extinction des moteurs) et A (juste avant le rallumage des moteurs). Les calculer.
- En déduire les accroissements de vitesse orthoradiale Δv_P et Δv_A .



Exercice 12 : Mouvement orbital de la Terre

La Terre T décrit autour du soleil S une orbite elliptique d'excentricité $e = 0,0167$, de demi-grand axe $a = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$ et de période $T = 365,25$ jours solaires.

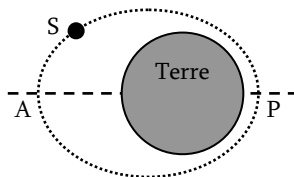
- Exprimer en fonction des données puis calculer le périhélie SP et l'aphélie SA de la trajectoire terrestre.
- En supposant que la trajectoire soit circulaire, exprimer la vitesse c de révolution, en fonction du rayon a et de la période T . Calculer v .



Exercice 13 : Satellite terrestre artificiel

Un satellite terrestre S est à son périhélie à l'altitude $h = 350\text{km}$. Sa période de révolution est $T = 5843 \text{ s}$. Données : $R_T = 6400\text{km}$ le rayon terrestre, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ la constante universelle de gravitation. $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ la masse de la Terre.

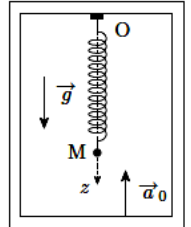
- Exprimer puis calculer le demi-grand axe a de la trajectoire du satellite.
- Exprimer en fonction de R_T , h et a l'excentricité e de la trajectoire du satellite. La calculer.
- Déterminer l'altitude H du satellite à son apogée.



RNG – Référentiel en translation

Exercice 14 : Oscillateur dans un ascenseur

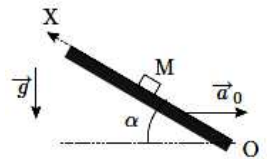
Un point matériel M, de masse m , est suspendu à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , dont l'extrémité supérieure est fixée au plafond d'un ascenseur, ayant un mouvement vertical ascendant d'accélération constante \vec{a}_0 .



- Exprimer l'allongement Δl_{eq} du ressort lorsque le point M est à l'équilibre par rapport à l'ascenseur.
- En prenant pour origine de mesure des déplacements $z(t)$ la position à l'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par z lorsque le point M est mis en mouvement. Que remarque-t-on ?

Exercice 15 : Glissement sur un plan incliné

Un point matériel M, de masse m , peut glisser sans frottement sur un support plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Ce plan est en mouvement de translation uniformément accélérée, d'accélération \vec{a}_0 orientée comme indiqué sur le dessin. On étudie le mouvement du point M suivant la ligne de plus grande pente (OX).



- Etablir l'expression de l'accélération \ddot{X} du point M relativement au plan incliné.
- A la date $t = 0$, le point M est abandonné sans vitesse initiale par rapport au plan. A quelle condition sur l'angle α le point M remonte-t-il la pente ?

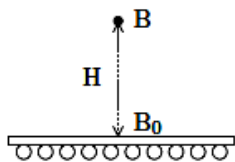
Exercice 16 : Poids apparent

Une personne de masse $m = 60\text{kg}$ se tient immobile sur un pèse-personne, dans un ascenseur animé d'un mouvement vertical ascendant d'accélération constante $a_0 = 1\text{m.s}^{-2}$ au début de son mouvement.

- Montrer que tout se passe comme si la personne se pesait sur Terre, à condition de remplacer son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ par un poids apparent $\vec{P}' = m\vec{g}'$. Exprimer le champ de pesanteur apparent en fonction des données.
- Quelle est la masse mapp affichée par le pèse-personne ? On prendra $g \approx 10\text{m.s}^{-2}$.

Exercice 17 : Tapis roulant

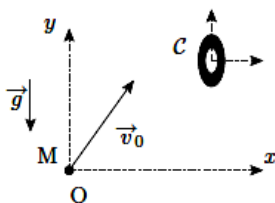
Un enfant se tient immobile sur un tapis roulant horizontal. Il lâche une bille B d'une hauteur $H = 1\text{m}$ par rapport au tapis, sans vitesse initiale par rapport à lui-même, à l'aplomb du point B_0 sur le tapis. On ne tient pas compte dans l'exercice des frottements exercés par l'air sur la bille.



1. Le tapis roulant avance à la vitesse uniforme $v = 4,5\text{km.h}^{-1}$. Déterminer la position du point d'impact I de la bille sur le tapis par rapport à B_0 .
2. Le tapis roulant est maintenant uniformément freiné, à l'instant même où l'enfant lâche la bille ; il s'arrête au bout d'une durée $\Delta t = 1\text{s}$. Déterminer en fonction des données la position du point d'impact I de la bille sur le tapis, par rapport à B_0 .
3. Calculer la distance entre I et B_0 . On prendra $g \approx 9,8\text{m.s}^{-2}$.

Exercice 18 : Tir sur une cible tombante

Un projectile assimilable à un point matériel M est tiré depuis l'origine O d'un référentiel galiléen R, dans le champ de pesanteur \vec{g} , avec un vecteur vitesse initiale \vec{v}_0 . Exactement au même moment, une cible C commence à tomber en chute libre, sans vitesse initiale. On définit le référentiel R' lié à la cible, supposée en translation par rapport au sol. Les frottements ne sont pas pris en compte.

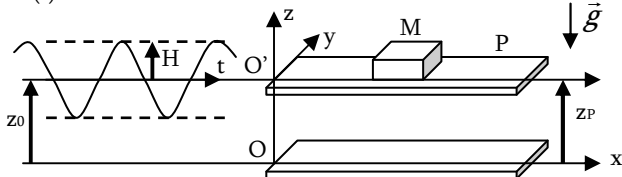


1. Faire le bilan des forces appliquées au point M dans le référentiel R'.
2. Quelle est la nature du mouvement du point M par rapport à la cible ?
3. Comment doit-on diriger le tir du point M par rapport à la cible de manière à l'atteindre au cours de sa chute ?

Exercice 19 : Plateau vibrant

Un objet rigide de forme cubique est posé sur un plateau P horizontal animé par rapport au sol d'un mouvement vibratoire sinusoïdal. La cote z_P de P obéit à l'équation horaire :

$$z_P(t) = z_0 + H \cos \omega t$$



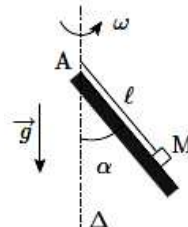
1. Vous effectuerez votre raisonnement par rapport au référentiel du plateau : A quelle condition doit satisfaire la pulsation ω des oscillations verticales pour que le cube reste à tout instant en contact avec le plateau.
2. Déterminer la fréquence critique à partir de laquelle le contact est rompu. Effectuer l'application numérique.

Données : $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$, $H = 1\text{mm}$.

RNG – Référentiel en rotation

Exercice 20 : Décollement d'un support en rotation

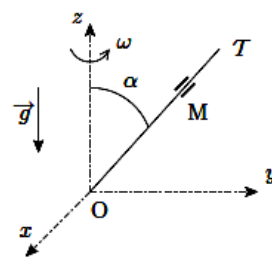
Un support plan incliné d'un angle α par rapport à la verticale est en rotation uniforme autour de l'axe vertical Δ , à la vitesse angulaire ω . Un point matériel M, de masse m , est attaché à l'extrémité d'un fil de longueur l dont l'autre extrémité est fixée en un point A de l'axe de rotation. Le point M repose sur le plan incliné.



1. Déterminer l'expression de l'intensité de l'action de contact \vec{N} exercée par le support plan sur le point M.
2. En déduire à partir de quelle valeur limite ω_{lim} de la vitesse angulaire de rotation le point M décolle du support.

Exercice 21 : Tige inclinée en rotation

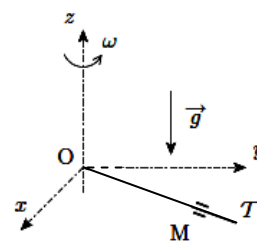
Un point matériel M de masse m peut coulisser sans frottement sur une tige T, d'extrémité O et formant un angle α avec la verticale ascendante (Oz). Cette tige est mise en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω . La position du point M sur la tige est repérée par son abscisse X mesurée par rapport à O.



1. Faire le bilan des forces exercées sur le point M dans le référentiel lié à la tige.
2. Déterminer la position d'équilibre X_{eq} du point M sur la tige, en fonction de ω , g et α . On pose $X(t) = X_{\text{eq}} + x(t)$.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. En déduire la forme générale de $x(t)$.
4. La position d'équilibre X_{eq} est-elle stable ? Justifier.

Exercice 22 : Tige en rotation

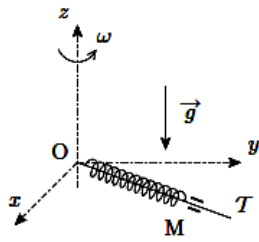
Un point matériel M de masse m peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale T, d'extrémité O, contenue dans le plan (Oxy) et tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical (Oz). La position du point M sur la tige est repérée par son abscisse X mesurée par rapport à O.



1. Faire le bilan des forces exercées sur le point M dans le référentiel lié à la tige.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $X(t)$.
3. En déduire la forme générale de la loi horaire $X(t)$.
4. A la date $t = 0$, on abandonne le point M à une distance a de l'axe (Oz), sans vitesse initiale par rapport à la tige. Exprimer $X(t)$ en fonction des données.

Exercice 23 : Oscillations dans un réf en rotation

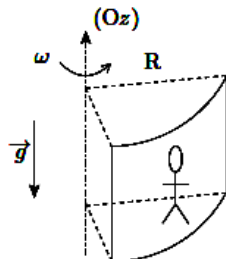
Un point matériel M de masse m peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale T, d'extrémité O, contenu dans la plan (Oxy) et tournant autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante ω . De plus, le point M est attaché à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k, enfilé sur la tige T, dont l'autre extrémité est fixée en O. La position du point M est repérée par son abscisse X(t) mesurée sur la tige par rapport au point O. On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.



1. Faire le bilan des forces exercées sur le point M dans le référentiel lié à la tige.
2. Montrer qu'il existe une position d'équilibre X_{eq} du point M sur la tige, sous réserve d'une condition portant sur ω à expliciter.
3. En posant $X(t) = X_{eq} + x(t)$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
4. En déduire la pulsation ω' des oscillations du point M autour de sa position d'équilibre. Que peut-on dire de la période des oscillations par rapport au cas où la tige est immobile ?

Exercice 24 : Attraction foraine

Un manège est constitué d'un grand cylindre creux d'axe vertical (Oz) et de rayon intérieur R. Des personnes prennent place dans le cylindre, dos plaqué contre la face interne du cylindre et l'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire ω . Lorsque la vitesse de rotation est suffisante, la plancher est retiré et les personnes restent « collées » à la paroi.



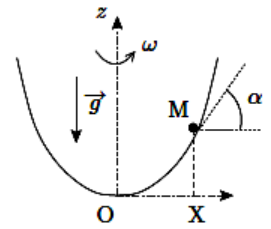
1. Faire le bilan des forces exercées sur une personne à l'équilibre dans le manège. Quelle hypothèse sur les forces mises en jeu est nécessaire à la possibilité d'un équilibre ?
2. On appelle μ le coefficient de frottement sur la paroi du cylindre. La personne est alors immobile tant que l'inégalité $f_r < \mu f_N$ est respectée, où \vec{f}_T et \vec{f}_N sont les composantes respectivement tangentielle et normale de la force de frottement exercée par la paroi. Déterminer en fonction de μ et des données la vitesse minimale ω_{min} de rotation du manège pour que le plancher puisse être retiré.

Exercice 25 : Machine à laver

Le tambour d'une machine à laver tourne autour d'un axe horizontal. Quelle doit être la vitesse minimale de rotation du tambour pour que le linge reste collé aux parois pendant l'essorage ? Le diamètre du tambour est $d = 50\text{cm}$ et $g = 10\text{m.s}^{-2}$.

Exercice 26 : Cuvette parabolique en rotation

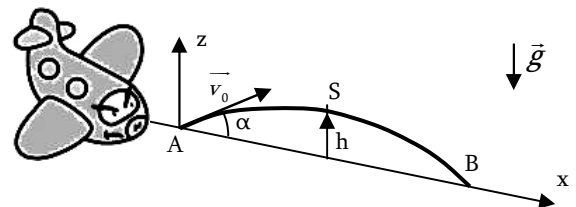
On considère une cuvette engendrée par la rotation de l'axe vertical ascendant (Oz) d'une parabole d'équation $z = kx^2$, où k est une constante positive. Cette cuvette est en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω . Dans cette cuvette, une bille ponctuelle M de masse m peut glisser sans frottement. On se limite à un mouvement du point M dans un plan méridien, c'est-à-dire un plan vertical contenant l'axe de rotation et lié à la cuvette. La position du point M est repérée par son abscisse X dans le plan méridien.



1. Faire le bilan des forces exercées sur le point M dans le référentiel lié à la cuvette.
2. En notant α l'angle formé par la tangente à la cuvette avec l'axe horizontal, exprimer $\tan \alpha$ en fonction des données.
3. Montrer que pour une certaine valeur de la vitesse angulaire de rotation ω , le point M est à l'équilibre par rapport à la cuvette.

Exercice 27 : Entraînement à l'impesanteur

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_G = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen, un avion, en translation par rapport au référentiel terrestre, décrit dans le plan vertical Oxz une trajectoire particulière AB afin d'entraîner les astronautes à l'impesanteur. Le champ de pesanteur est uniforme d'intensité $g = 10\text{m.s}^{-2}$. Les phénomènes de frottement sont négligés.



A l'instant $t = 0$, l'avion est en A, il modifie sa trajectoire avec une vitesse initiale située dans le plan Oxz et faisant un angle $\alpha > 0$ avec l'horizontale. Sa position est alors :

$$\vec{OA} = x_A \cdot \vec{e}_x + z_A \cdot \vec{e}_z$$

1. Quelle doit-être la nature de la trajectoire AB de l'avion pour l'astronaute soit en impesanteur (l'astronaute n'est alors plus en contact avec l'avion). Déterminer l'équation de cette trajectoire par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R}_G .
2. Les possibilités de l'avion limitant la hauteur h de son ascension à 9000m, quelle est la durée maximale t_{max} pendant laquelle on peut réaliser l'impesanteur par ce procédé ?

Poids et Champ de Pesanteur

Exo 28 : Calcul du champ de pesanteur en un point

On considère que la Terre est une sphère de rayon $R_T = 6400\text{km}$ et de masse $M_T = 6.10^{24}\text{kg}$ en rotation autour de l'axe avec la période $T_0 = 23\text{h}56\text{min}4\text{s}$ dans le référentiel géocentrique. Donnée : $G = 6,67.10^{-11}\text{ usi}$ la constante de gravitation universelle.

- Exprimer le champ de gravitation \vec{G}_T en un point du globe. Calculer son intensité.
- Exprimer le champ de pesanteur \vec{g} en un point M du globe situé à la latitude λ , en fonction de \vec{G}_T , λ , R_T et T_0 .
- Calculer l'intensité g_0 du champ de pesanteur en un point situé à la latitude $\lambda = 45^\circ$.

Exo 29 : Si la Terre tournait plus vite

On assimile la Terre à un astre sphérique de centre O, de rayon $R_T = 6400\text{km}$ et de masse $M_T = 6.10^{24}\text{kg}$, en rotation uniforme autour de l'axe polaire avec une période sidérale T_0 . Donnée : $G = 6,67.10^{-11}\text{ usi}$ la constante de gravitation universelle.

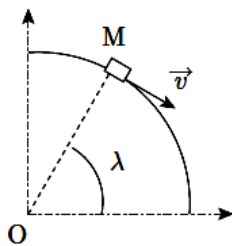
- Rappeler l'expression du champ gravitationnel \vec{G}_T créée par la Terre en un point M à sa surface.
- Définir le champ de pesanteur \vec{g} en un point à la surface de la Terre. Exprimer sa norme g en un point situé à l'équateur.
- Quelle devrait être la période T de rotation de la Terre sur elle-même pour que le champ de pesanteur soit nul en tout point de l'équateur? Calculer la durée du jour correspondante.

Force de Coriolis

Exo 30 : Force d'inertie sur un wagon allant vers le sud

On considère un wagon de masse $m = 20\text{t}$, assimilé à un point matériel M, circulant du nord vers le sud à la vitesse $v = 200\text{km.h}^{-1}$, en un lieu de latitude $\lambda = 60^\circ$ à la surface de la Terre.

Données : $T = 86164\text{s}$ durée du jour sidéral terrestre, $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$, champ de pesanteur terrestre.

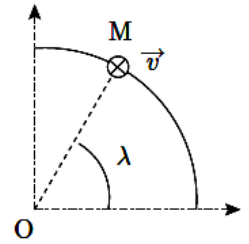


- Dans quel sens la force d'inertie de Coriolis exercée sur le train est-elle orientée? Calculer son intensité.
- Pour minimiser les efforts latéraux subis par les rails, on les incline de manière à ce que la réaction exercée par ceux-ci soit normale au plan des rails. De quel angle α faut-il les incliner et dans quel sens?

Exo 31 : Force d'inertie sur un wagon allant à l'est

On considère un wagon de masse $m = 20\text{t}$, assimilé à un point matériel M, circulant vers l'est à la vitesse $v = 200\text{km.h}^{-1}$, en un lieu de latitude $\lambda = 60^\circ$ à la surface de la Terre.

Données : $T = 86164\text{s}$ durée du jour sidéral terrestre, $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$, champ de pesanteur terrestre.



- Dessiner la force d'inertie de Coriolis exercée sur le train.
- Calculer la composante de cette force dans le plan horizontal.

Exo 32 : Lancement vertical d'un projectile

On lance depuis un point A situé à la surface de la Terre, en un lieu de latitude λ , un projectile assimilé à un point matériel M de masse m , verticalement vers le haut, avec une vitesse initiale v_0 . On ne tient pas compte des frottements exercés par l'air ambiant. On utilise le repère local (Axyz) tel que (Az) soit suivant la verticale ascendante et (Ax) vers le sud. On note Ω la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même.

- Donner une forme approchée pour la force d'inertie de Coriolis exercée sur le projectile au cours de son mouvement, en utilisant le fait que sa vitesse \vec{v} est très proche de celle dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
- En déduire les équations horaires approchées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du projectile.
- Déterminer les expressions des coordonnées approchées du point de retombée du projectile au sol.

Exo 33 : Déviation d'un palet

Un hockeyeur se trouve en un point A à la surface de la Terre situé à la latitude $\lambda = 51^\circ$, sur une surface plane horizontale gelée. A l'aide de sa crosse, il propulse un palet, assimilé à un point matériel M de masse $m = 300\text{g}$, vers le sud et avec une vitesse initiale $v = 10\text{m.s}^{-1}$, en direction d'un mur situé à une distance $D = 500\text{m}$. On note Ω la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même. On ne tient pas compte de l'effet des frottements sur le mouvement du palet. On donne $T = 86164\text{s}$ la durée du jour sidéral terrestre.

- En supposant que le vecteur vitesse \vec{v} du palet est bien approché par celui du mouvement dans un référentiel galiléen, exprimer la force d'inertie de Coriolis exercée sur le palet. Comment est orientée cette force?
- Déterminer les équations horaires approchées $x(t)$ et $y(t)$ du palet, le repère (Axyz) étant tel que l'axe (Ax) est vers le sud et l'axe (Ay) vers l'est.
- En déduire la déviation Δy subie par le palet lorsqu'il frappe le mur. Faire l'application numérique.
- On considère le cas où le tir est effectué depuis le pôle nord. Retrouver l'expression littérale de la déviation Δy en analysant le mouvement du palet dans le référentiel géocentrique.

SOLUTION des EXERCICES – ME6 / ME7 – TMC – RNG – Feuille 1/3

Loi de Képler – Mouvement à Force Centrale

Exercice 1 : La masse de Jupiter

- G = constante universelle de gravitation, $G = \frac{4\pi^2 r^3}{MT^2}$, donc $[G] = L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$, donc en $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$.
- Courbe $r^3 = f(T^2)$ = droite de coef dir $K = \frac{GM}{4\pi^2} = 3,2 \cdot 10^{15} \text{ si}$,
ce qui donne $M = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$.

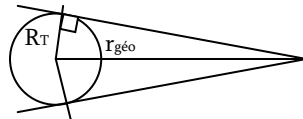
Exercice 2 : L'atome de Bohr

PFDD :
$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{e(-e)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} \frac{-mv^2}{r} \\ mr\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$$

Ainsi :
$$v = e \sqrt{\frac{1}{m \cdot 4\pi\epsilon_0 r}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

Exercice 3 : Couverture des satellites géostationnaires

- Satellite géostationnaire = immobile par rapport à un observateur terrestre. → Doit accompagner la Terre dans son mouvement de rotation
Orbite inclinée : impossible car le satellite ne serait pas immobile par rapport à l'observateur
Orbite parallèle à l'équateur : impossible car ne contient pas le centre de force O (la conservation du moment cinétique impose que M appartienne au même plan fixe contenant O)
- PFDD :
$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{-GMm}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} \frac{-mv^2}{r} \\ mr\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$$
, ce qui donne $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, mais $v = \frac{2\pi r}{T}$, ainsi $r_{géo} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$
et on obtient l'altitude $h_{géo} = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} - R_T \approx 36000 \text{ km}$
- Zone observable



$$\lambda = \cos^{-1} \left(\frac{R_T}{r_{géo}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{R_T}{R_T + h_{géo}} \right) = 81,3^\circ$$

Exercice 4 : Toujours plus haut

- Conservation de l'énergie mécanique : (pas de frottements)
$$E_{m_ini} = -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2) = E_{m_fin} = -\frac{GM_T m}{R_T + H}$$

Et
$$\frac{m v_1^2}{m (v_0^2 - v_1^2)} = -\frac{R_T + H}{R_T} \Rightarrow H = R_T \left[\frac{v_1^2}{(v_0^2 - v_1^2)} - 1 \right]$$
- Si $v_0 = v_1$, alors $H \rightarrow +\infty$, il s'agit de la vitesse de libération, la vitesse nécessaire à ce que le projectile soit libéré de l'attraction terrestre, il s'en va à l'infini.

Exercice 5 : Satellites terrestres – Vitesse de libération

- PFDD :
$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{-GMm}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} \frac{-mv^2}{r} \\ mr\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$$

Ainsi :
$$\begin{cases} \frac{-GM_T m}{r^2} = \frac{m v_0^2}{r} \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \\ \dot{\theta} = \text{constante} \rightarrow \text{mvt uniforme} \end{cases}$$

- AN :

Satellite	Rasant	SPOT	Géostationnaire
r	R _T	R _T +832km	R _T +36000km
v	7,91 km.s ⁻¹	7,44 km.s ⁻¹	3,07 km.s ⁻¹

A comparer avec la vitesse au niveau du sol :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow v_0 = r\dot{\theta} = (R_T \cos \lambda) \cdot \frac{2\pi}{T} = 467 \text{ m.s}^{-1} \ll v_{\text{satellite}}$$

- D'après la 1,
$$E_C = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m G M_T}{2r} = -\frac{1}{2} E_P$$

$$E_m = E_C + E_P = \frac{m G M_T}{2r} + \frac{-G M_T m}{r} = -E_C$$

Avec frottement, $E_m \searrow \Rightarrow E_C \nearrow \Rightarrow v \nearrow$ mais $r \searrow$
- Pas de frottement → $E_m =$ constante du mouvement (car la force gravitationnelle est conservative, donc $dE_m = \delta W_{NC} = 0$).
(1) : ne correspond à aucune trajectoire possible, le satellite tombe sur la Terre, il n'a pas une vitesse suffisante pour rester en l'air
(2) : Valeur unique pour r : trajectoire circulaire (état lié)
(3) : Trajectoire elliptique, oscillation entre une valeur max et min du rayon autour du centre de la Terre (au foyer, état lié)
(4) : $E = 0$, Premier état libre, le satellite peut s'extraire de la gravitation terrestre et partir à l'infini. Cela donne une trajectoire parabolique
(5) : Etat libre, trajectoire hyperbolique
- Premier état libre : $E_m = 0$, trajectoire parabolique, ce qui donne :
$$E_m = 0 = \frac{1}{2} m v_L^2 - \frac{G M_T m}{r} \Rightarrow v_L = \sqrt{\frac{2 G M_T}{r}} = 11,2 \text{ km.s}^{-1}$$

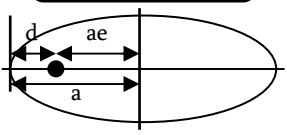
Exercice 6 : Etude d'un astéroïde

- Catégorie de conique ? On calcule l'énergie mécanique :
$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_s m}{r_0} < 0$$
, donc trajectoire elliptique.
- On étend la relation au cas elliptique :
$$E_m = \frac{-m G M_s}{2a}$$

Et l' E_m est constante, donc
$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_s m}{r_0} = \frac{-m G M_s}{2a}$$

Ainsi :
$$a = \frac{G M_s}{2} \left(\frac{G M_s}{r_0} - \frac{v_0^2}{2} \right) = 2 \cdot 10^9 \text{ km}$$
- Et d'après la loi de Képler :
$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G M_s}} = 48,5 \text{ ans}$$

Exercice 7 : Comète de 1843

1. PFD sur la Terre... $\Rightarrow u = \sqrt{\frac{GM_S}{a_0}}$ ou $GM_S = a_0 u^2$
2. Trajectoire parabolique = cas limite avec $E_m = 0$:
 $E_m = 0 = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_S m}{d} \Rightarrow v_p^2 = \frac{2GM_S}{d} \Rightarrow v_p = u \sqrt{\frac{2a_0}{d}} = 543 \text{ km.s}^{-1}$
3. Petit rappel sur l'ellipse :
 Donc : $d + a \cdot e = a$
 Et $\Rightarrow a = \frac{d}{1-e} = \frac{d}{x} = 64,9 \cdot a_0$

4. Conservation du moment cinétique (à l'aphélie et au périhélie, vitesse et position sont perpendiculaires) :
 $r_A v_A = r_p v_p \Rightarrow (2a-d)v_A = dv_p \Rightarrow v_A = \frac{x}{2-x} v_p \approx \frac{x \cdot v_p}{2} = 25,5 \text{ m.s}^{-1}$
5. Si on note T_0 la période de la Terre, et T celle de la comète :
 $\frac{T_0^2}{a_0^3} = \text{cste} = \frac{T^2}{a^3} \Rightarrow T = T_0 \sqrt{\frac{a^3}{a_0^3}} = T_0 \left(\frac{d}{xa_0}\right)^{3/2} = 522,8 \text{ années}$
 La comète reviendra en 2365...

Exercice 8 : Apport de vitesse

1. PFD... $\Rightarrow \begin{cases} v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = 7,7 \text{ km.s}^{-1} \\ T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{GM_T}} = 5570 \text{ s} \end{cases}$
2. Le mouvement ne peut plus être circulaire, on vérifie qu'il reste lié : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T + h} < 0$, OK, car $E_m < 0$. Il est donc elliptique. Le point où l'on envoie le supplément de vitesse sera alors le périhélie (plus proche de la Terre). On utilise ensuite l'énergie mécanique constante :
 $E_m = -\frac{GM_T m}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T + h} \Rightarrow a = \frac{GM_T}{2} \left(\frac{GM_T}{R_T + h} - \frac{v^2}{2}\right)^{-1} = 9525 \text{ km}$
3. On en déduit : $h_p = h = 400 \text{ km}$ et $h_A = 2a - 2R_T - h = 5850 \text{ km}$,
 et $T' = T \left(\frac{a}{R_T}\right)^{3/2} = 9234 \text{ s}$, $e = 1 - \frac{R_T + h}{a} = 0,29$

Exercice 9 : Orbite de transfert vers Mars

1. On a directement $v_T = \frac{2\pi d_T}{T} = 29,9 \text{ km.s}^{-1}$ et $v_M = 24,3 \text{ km.s}^{-1}$
2. Lancement d'un vaisseau vers Mars :
 - a) Demi-grand axe : $a = \frac{d_T + d_M}{2} = 1,3 \text{ UA}$
 - b) Loi de Kepler : $T = T_T \sqrt{\frac{a^3}{d_T^3}} = 1,5 \text{ années} = 18 \text{ mois}$ donc le voyage dure la moitié : 9 mois.
 - c) D'après la loi des aires, le satellite va moins vite lorsqu'il est plus loin du centre de force, donc $v_2 < v_1$.
 - d) Le lancement doit respecter certaines « fenêtres » car au moment où il va croiser l'orbite de Mars, il faut que la planète y soit !!! Il faut donc synchroniser les lancements
 - e) On utilise la conservation des énergies mécaniques :

$$\begin{cases} E_m = -\frac{GM_T m}{2r_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GM_T m}{r_1} \Rightarrow GM_T = r_1 v_1^2 \\ E_m = -\frac{GM_T m}{2a} = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_T m}{r_1} \Rightarrow v_p = v_1 \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} = 32,9 \text{ km.s}^{-1} \end{cases}$$

Et de même $\Rightarrow v_A = v_2 \sqrt{2 - \frac{r_2}{a}} = v_2 \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} = 19,0 \text{ km.s}^{-1}$

- f) Accroissements : $\Delta v_P = 3,0 \text{ km.s}^{-1}$, et $\Delta v_A = 5,34 \text{ km.s}^{-1}$.
- g) Si on lance le satellite directement depuis la Terre, il faut le lancer dans le sens de rotation autour du soleil, donc on profite des 30 km.s^{-1} de l'orbite terrestre, il suffit de lui donner la différence : $\Delta v_P = 3 \text{ km.s}^{-1}$, ce qui est somme toute très peu. Mais ce n'est pas possible tel quel, car le satellite ne va pas sortir de l'attraction terrestre, puisque $\Delta v_P < v_L = 11,2 \text{ km.s}^{-1}$. On n'a pas tenu compte de la force gravitationnelle de la Terre dans les calculs. Il faudra en fait d'abord passer par une orbite circulaire intermédiaire autour de la Terre avant de l'envoyer dans l'espace et de s'affranchir de l'attraction terrestre.

Exercice 11 : Orbite de transfert (de Hohman)

1. Demi grand axe : $a = \frac{r_1 + r_2}{2} = 48700 \text{ km}$
2. Vitesses : PFD... $v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} = 7,7 \text{ km.s}^{-1}$ et $v_2 = 3,1 \text{ km.s}^{-1}$
3. Vitesses : $\begin{cases} v_p = v_1 \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} = 10,1 \text{ km.s}^{-1} \\ v_A = v_2 \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} = 1,6 \text{ km.s}^{-1} \end{cases}$
4. Accroissements : $\Delta v_P = +3,4 \text{ km.s}^{-1}$, et $\Delta v_A = +1,5 \text{ km.s}^{-1}$. Il s'agit bien de deux poussées.

Exercice 12 : Mouvement orbital de la Terre

1. Périhélie $SP = a(1-e) = 1,47 \cdot 10^{11} \text{ m}$, et l'aphélie $SA = a(1+e) = 1,53 \cdot 10^{11} \text{ m} \rightarrow$ Très faible excentricité – presque circulaire.
2. Si trajectoire circulaire : $c = \frac{2\pi a}{T} = 29,9 \text{ km.s}^{-1}$

Exercice 13 : Satellite terrestre artificiel

1. Loi de Képler : $a = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 7021 \text{ km}$
2. Excentricité : $e = 1 - \frac{R_T + h}{a} = 0,04$
3. Altitude de l'apogée : $H = a(1+e) - R_T = 900 \text{ km}$

SOLUTION des EXERCICES – ME6 / ME7 – TMC – RNG – Feuille 2/3

RNG – Référentiel en translation

Exercice 14 : Oscillateur dans un ascenseur

1. PFS dans R' lié à l'ascenseur non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = \overline{a_0} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = \overline{a_0} \\ \overline{a_{cor}(M)} = \vec{0} \end{cases}$$

Donc $m \cdot \overline{a_{(M/R')}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = \vec{0} = \overline{P} + \overline{T} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}$

Ainsi : $0 = -mg + k\Delta l_{eq} - ma_0 \Rightarrow \Delta l_{eq} = \frac{m(g+a_0)}{k}$

2. PFD dans R' Non Galiléen :

$$m \cdot \overline{a_{(M/R')}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = m\ddot{z} \cdot \overline{e_z} = \overline{P} + \overline{T} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}$$

Ainsi : $m\ddot{z} = -m(g+a_0) + k(l-l_0)$ avec $l = l_{eq} - z$
 $\Rightarrow \ddot{z} = \frac{-k\Delta l_{eq}}{m} + \frac{k}{m}(l_{eq} - z - l_0) \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$

On remarque que la position d'équilibre est différente, mais l'équation différentielle est la même que dans l'ascenseur immobile (même pulsation)

Exercice 15 : Glissement sur un plan incliné

1. PFD dans R' lié au plan incliné non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = \overline{a_0} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = \overline{a_0} \\ \overline{a_{cor}(M)} = \vec{0} \end{cases}$$

Donc $m \cdot \overline{a_{(M/R')}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = \overline{a_0} = \overline{P} + \overline{R_N} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}$

Ainsi : $\begin{cases} m\ddot{x} \\ m\ddot{z} \end{cases} = \begin{bmatrix} -mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +ma_0 \cos \alpha \\ -ma_0 \sin \alpha \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow \ddot{x} = a_0 \cos \alpha - g \sin \alpha$

2. M remonte la pente si $\ddot{x} > 0 \Rightarrow \tan \alpha < \frac{a_0}{g}$

Exercice 16 : Poids apparent

1. PFD dans R' lié à l'ascenseur non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = \overline{a_0} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = \overline{a_0} \\ \overline{a_{cor}(M)} = \vec{0} \end{cases}$$

Donc $m \cdot \overline{a_{(M/R')}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = \overline{a_0} = \overline{P} + \overline{R_N} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}$

Poids apparent : $\overline{P_{app}} = \overline{P} + \overline{F_{ie}} = -m(g+a_0) \cdot \overline{e_z} \Rightarrow \overline{g'} = \overline{g+a_0}$

2. Tout se passe comme si la personne pesait m' dans le champ de pesanteur g : $m'g = mg' \Rightarrow m'g = \frac{mg'}{g} = 66kg$

Exercice 17 : Tapis roulant

1. PFD dans R' non galiléen en mvt % R_T galiléen :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = \vec{0} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = \vec{0} \\ \overline{a_{cor}(M)} = \vec{0} \end{cases}$$

$$m \cdot \overline{a_{(M/R')}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \overline{P} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}, \text{ ce qui}$$

nous donne $\ddot{x} = 0$, la bille tombe exactement en B₀, sur la verticale apparente, qui bouge avec le tapis.

2. Tapis uniformément freiné : nouveau mouvement :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = -a_0 \cdot \overline{e_x} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = -a_0 \cdot \overline{e_x} \\ \overline{a_{cor}(M)} = \vec{0} \end{cases}$$

On calcule la valeur de a₀ en intégrant : $a_0 = \frac{v_0}{\Delta t} = 1,25ms^{-2}$

$$\overline{v_{abs}(O')} = (-a_0 t + v_0) \cdot \overline{e_x} \text{ et } v_{abs}(O')_{(t=0)} = 0 = -a_0 t + v_0$$

PFD : $m \cdot \overline{a_{(M/R')}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \overline{P} + \overline{F_{ie}}$

Ainsi : $m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ma_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$

Temps de chute : $\Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow \overline{B_0 I} = \Delta x \cdot \overline{e_x} = \frac{h a_0}{g} \cdot \overline{e_x}$

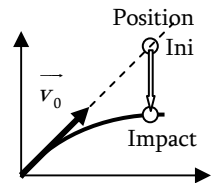
3. Distance entre I et B₀ : $\Delta x = 13cm$

Exercice 18 : Tir sur une cible tombante

1. Forces : Poids $\overline{P} = m\overline{g}$ / $\overline{F_{ie}} = -m\overline{a_{(C/R_T)}} = -m\overline{g}$ / $\overline{F_{ic}} = \vec{0}$, car $\overline{\Omega_{R'/R_T}} = \vec{0}$ et C soumis à son poids $m_C \cdot \overline{a_{(C/R_T)}} = m_C \overline{g}$...

2. PFD sur M dans R' : $\overline{ma_{(M/R')}} = \overline{P} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}} = \vec{0}$, le projectile est donc en mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel de la cible.

3. Il faut diriger le tir vers la cible, ainsi, la cible va tomber en chute libre, mais le projectile également... les deux vont se rejoindre



Exercice 19 : Plateau vibrant

1. PFS dans R' lié au plateau non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = \ddot{z}_p \cdot \overline{e_z} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = \ddot{z}_p \cdot \overline{e_z} \\ \overline{a_{cor}(M)} = \vec{0} \end{cases}$$

Donc $m \cdot \overline{a_{(M/R')}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = \vec{0} = \overline{P} + \overline{R_N} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}$

Ainsi : $0 = -mg + R_N - m\ddot{z}_p \Rightarrow R = m(g - \omega^2 H \cos \omega t)$

R ne doit jamais s'annuler pour que le contact soit conservé. Il faut donc : $g \geq \omega^2 H \Rightarrow \omega \leq \sqrt{g/H}$

2. Fréquence critique : $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{H}} = 15,7 Hz$

RNG – Référentiel en rotation

Exercice 20 : Décollement d'un support en rotation

1. PFS dans R' cylindrique lié au plan incliné tournant non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = \vec{0} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \omega \cdot \overline{e_\Delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = -l\omega^2 \sin \alpha \cdot \overline{e_r} \\ \overline{a_{cor}(M)} = 2\overline{\Omega_{R'/R_T}} \wedge \overline{v_{rel}(M)} \end{cases}$$

Donc $m \cdot \overline{a_{(M/R)}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = \vec{0} = \overline{P} + \overline{R_N} + \overline{T} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}$

On projette sur une base $\overline{e_x} \parallel \text{plan vers le haut}$, $\overline{e_y} \perp \text{plan}$.

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \cos \alpha \\ -mg \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml\omega^2 \sin^2 \alpha \\ ml\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Et $R_N = |\overline{N}| = mg \sin \alpha - mr\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$

2. Le point décolle du support si la réaction s'annule :

$$R_N = 0 \Leftrightarrow \omega_{lim} = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}$$

Exercice 21 : Tige inclinée en rotation

1. PFS dans R' cylindrique lié au plan incliné tournant non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = \vec{0} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \omega \cdot \overline{e_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = -r\omega^2 \sin \alpha \cdot \overline{e_r} \\ \overline{a_{cor}(M)} = 2\overline{\Omega_{R'/R_T}} \wedge \overline{v_{rel}(M)} \end{cases}$$

Donc $m \cdot \overline{a_{(M/R)}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = \vec{0} = \overline{P} + \overline{R_N} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}$

On projette sur une base $\overline{e_x} \parallel \text{tige vers le haut}$, $\overline{e_y} \perp \text{tige}$.

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \cos \alpha \\ -mg \sin \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mr\omega^2 \sin^2 \alpha \\ -mr\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix}$$

2. On obtient alors : Et

$$X_{eq} = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

3. Equation diff : on applique un PFD : Attention F_{ic} non nulle

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \cos \alpha \\ -mg \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_N \\ R_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mX\omega^2 \sin^2 \alpha \\ -mX\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{ic} \end{bmatrix}$$

Ainsi : $m\ddot{x} = -mg \cos \alpha + m(X_{eq} + x(t))\omega^2 \sin^2 \alpha$

Et en simplifiant : $\ddot{x} - x \cdot \omega^2 \sin^2 \alpha = 0$

Forme générale en $x(t) = Ae^{\omega \sin \alpha t} + Be^{-\omega \sin \alpha t}$

4. → Solution en cos hyperbolique, donc la position d'équilibre est instable...

Exercice 22 : Tige en rotation

- 1/2. PFD dans R' cylindrique lié à la tige tournante non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = \vec{0} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \omega \cdot \overline{e_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = -r\omega^2 \cdot \overline{e_r} \\ \overline{a_{cor}(M)} = 2\omega \dot{r} \cdot \overline{e_\theta} \end{cases}$$

Donc $m \cdot \overline{a_{(M/R)}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = \vec{0} = \overline{P} + \overline{R_N} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} m\ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_\theta \\ R_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mr\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\omega \dot{r} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

3. Forme général en cosinus hyperbolique : la bille s'écarte de plus en plus du centre... $r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

4. Avec les CI : $\begin{cases} r(0) = a = A + B \\ \dot{r}(0) = 0 = A\omega - B\omega \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{a}{2}$

Ce qui donne $r(t) = X(t) = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \cosh(\omega t)$

Exercice 23 : Oscillations dans un réf en rotation

1. PFS dans R' cylindrique lié à la tige tournante non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = \vec{0} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \omega \cdot \overline{e_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = -r\omega^2 \cdot \overline{e_r} \\ \overline{a_{cor}(M)} = 2\omega \dot{r} \cdot \overline{e_\theta} \end{cases}$$

Donc $m \cdot \overline{a_{(M/R)}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = \vec{0} = \overline{P} + \overline{R_N} + \overline{T} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}$

2. Position d'équilibre :

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_\theta \\ R_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k(r-l_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mr\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\omega \dot{r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Possible si $r_{eq} = \frac{kl_0}{k - m\omega^2} = \frac{l_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} > 0 \Leftrightarrow \omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Sinon le mouvement part en cosinus hyperbolique, force centrifuge trop importante, le ressort n'arrive pas à retenir.

3. Equa diff : PFD

$$\begin{bmatrix} m\ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_\theta \\ R_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k(r-l_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mr\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\omega \dot{r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cela donne : $m\ddot{x} + k(X_{eq} + x - l_0) - m(X_{eq} + x)\omega^2 = 0$

On simplifie $\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega^2)x = 0$

4. Pulsation des oscillations : $\omega' = \omega_0^2 - \omega^2$, et on retrouve la pulsation propre dans le cas où la tige est immobile.

Exercice 24 : Attraction foraine

1. PFS dans R' cylindrique lié au cylindre tournant non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \overline{a_{(O'/R_T)}} = \overline{a_{abs}(O')} = \vec{0} \\ \overline{\Omega_{R'/R_T}} = \omega \cdot \overline{e_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{a_{ent}(M)} = -r\omega^2 \cdot \overline{e_r} \\ \overline{a_{cor}(M)} = 2\overline{\Omega_{R'/R_T}} \wedge \overline{v_{rel}(M)} \end{cases}$$

Donc $m \cdot \overline{a_{(M/R)}} = m \cdot \overline{a_{rel}(M)} = \vec{0} = \overline{P} + \overline{R} + \overline{F_{ie}} + \overline{F_{ic}}$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f_N \\ 0 \\ f_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mR\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il faut absolument

qu'il y ait un frottement solide pour pouvoir compenser \overline{P} .

2. Equilibre possible : $f_T \leq \mu \cdot f_N \Leftrightarrow mg \leq \mu m R \omega^2 \Leftrightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}$

SOLUTION des EXERCICES – ME6 / ME7 – TMC – RNG – Feuille 3/3

Exercice 25 : Machine à laver

Même démarche que pour les exos précédents

PFS dans R' cylindrique lié au cylindre tournant non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \vec{a}_{(O'/R_T)} = \vec{a}_{abs}(O') = \vec{0} \\ \vec{\Omega}_{R'/R_T} = \omega \cdot \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{ent}(M) = -r\omega^2 \cdot \vec{e}_r \\ \vec{a}_{cor}(M) = 2\vec{\Omega}_{R'/R_T} \wedge \vec{v}_{rel}(M) \end{cases}$$

Donc $m \cdot \vec{a}_{(M/R')} = m \cdot \vec{a}_{rel}(M) = \vec{0} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$

On se place dans la situation la plus défavorable pour que le linge puisse tomber : lorsqu'il est en haut → Poids vertical

Ainsi :
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mR\omega^2 \end{bmatrix} \Rightarrow R_N = m(R\omega^2 - g)$$

Le linge ne tombe pas si la réaction ne s'annule pas :

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$$

On calcule la vitesse : $\Omega_{lim} = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{d}} = 60 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}$

Position :
$$\overline{OM}_{(t)} = \begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha + x_{(0)} \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha + z_{(0)} \end{cases}$$

Trajectoire :
$$z = \frac{-g(x - x_{(0)})^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + (x - x_{(0)}) \tan \alpha + z_{(0)}$$

Le trajectoire de l'avion est parabolique.

2. Point culminant : S → $\dot{z}(S) = 0 \Rightarrow t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

L'avion est monté de $h = z_s - z_{(0)} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

Cela donne $v_0 \sin \alpha = \sqrt{2gh}$

Et puisque la parabole est symétrique :

$$T = 2t_s = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 84,85 \text{ s} = 1 \text{ min } 25 \text{ s}$$

Exercice 26 : Cuvette parabolique en rotation

1. PFS dans R' cylindrique lié au cylindre tournant non galiléen en mouvement % au réf R_T galiléen terrestre :

$$\begin{cases} \vec{a}_{(O'/R_T)} = \vec{a}_{abs}(O') = \vec{0} \\ \vec{\Omega}_{R'/R_T} = \omega \cdot \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{ent}(M) = -r\omega^2 \cdot \vec{e}_r \\ \vec{a}_{cor}(M) = 2\vec{\Omega}_{R'/R_T} \wedge \vec{v}_{rel}(M) \end{cases}$$

Donc $m \cdot \vec{a}_{(M/R')} = m \cdot \vec{a}_{rel}(M) = \vec{0} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$

Ainsi :
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_N \sin \alpha \\ 0 \\ R_N \cos \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mR\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. On a $\tan \alpha \approx \alpha = \frac{dz}{dx} = 2kx$

3. On exploite le PFS : $R_N = \frac{mg}{\cos \alpha} = \frac{mX\omega^2}{\sin \alpha} \Rightarrow \omega = \sqrt{2kg}$

Exercice 27 : Entraînement à l'impesanteur

1. Système astronaute étudié dans le réf de l'avion, en mouvement % réf terrestre galiléen :

$$\begin{cases} \vec{a}_{(O'/R_T)} = \vec{a}_{abs}(O') \\ \vec{\Omega}_{R'/R_T} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{ent}(M) = \vec{a}_{(O'/R_T)} \\ \vec{a}_{cor}(M) = \vec{0} \end{cases}$$

On applique un PFD : $m \cdot \vec{a}_{(M/R')} = \vec{P} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$

En impesanteur si $m \cdot \vec{a}_{(M/R')} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_{ie} = m\vec{g} - m\vec{a}_{(O'/R_T)}$

L'avion est donc en chute libre
$$\begin{cases} \vec{a}_{(O'/R_T)} = \vec{g} \\ \vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_{(0)} \\ \vec{r}_{(t)} = \frac{1}{2} \vec{g}t^2 + \vec{v}_{(0)}t + \vec{r}_{(0)} \end{cases}$$

Poids et Champ de Pesanteur

Exo 28 : Calcul du champ de pesanteur en un point

1. Champ de gravitation $\vec{G}_T = \frac{-GM_T}{R_T^2} \cdot \vec{e}_r$, $G_T = 9,77 \text{ m.s}^{-2}$.

2. Champ de pesanteur = somme du champ gravitationnel à la surface + force d'inertie d'entraînement (centrifuge) due à la rotation de la Terre sur elle-même : (voir TD17)

$$\vec{g} = \vec{G}_T + \omega^2 \vec{HM} = \frac{-GM_T}{R_T^2} \cdot \vec{e}_r + R_T \omega^2 \cos \lambda \cdot \vec{e}_x$$

(Avec $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{OM}$ vecteur radial unitaire des coordonnées

sphériques, et $\vec{e}_x = \frac{\vec{HM}}{HM}$ avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation (\vec{e}_z)).

3. Pour $\lambda = 45^\circ$, on obtient $g = 9,75 \text{ m.s}^{-2}$, avec le calcul :

$$\begin{aligned} \|\vec{g}\|^2 &= \sqrt{G_T^2 + (R_T \omega^2 \cos \lambda)^2 - 2G_T (R_T \omega^2 \cos \lambda) \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x} \\ &= \sqrt{G_T^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 R_T^2 \cos^2 \lambda - 2G_T R_T \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos^2 \lambda} \end{aligned}$$

Exo 29 : Si la Terre tournait plus vite

1. Champ gravitationnel $\vec{G}_T = \frac{-GM_T}{R_T^2} \cdot \vec{e}_r$

2. Pesanteur $\vec{g} = \vec{G}_T + \omega^2 \vec{HM} = \frac{-GM_T}{R_T^2} \cdot \vec{e}_r + R_T \omega^2 \cos \lambda \cdot \vec{e}_x$

(voir exo préc. et TD17), Norme à l'équateur $g = G_T - \omega^2 R_T$.

3. champ nul → Il faudrait $T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}} = 1 \text{ h } 25 \text{ min}$

Force de Coriolis

Exo 30 : Force d'inertie sur un wagon allant vers le sud

1. On prend un réf: $\mathfrak{R}_T = (O, \vec{e}_N, \vec{e}_W, \vec{e}_z)$, avec les vecteurs unitaires respectivement orientés vers le nord, vers l'ouest et verticalement vers le haut. Ainsi, $\vec{v}_{M/\mathfrak{R}_T} = -v \cdot \vec{e}_N$.

La force de Coriolis est: $\vec{F}_{ic} = -2m \vec{\Omega}_{R_T/R_G} \wedge \vec{v}_{M/\mathfrak{R}_T}$, ce qui

donne
$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega v \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ 0 \\ \sin \lambda \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{F}_{ic} = 2m\omega v \sin \lambda \cdot \vec{e}_W$$

Elle orientée vers l'Ouest, et de norme $F_{ic} = 140N$.
(\rightarrow Force très faible par rapport au poids $P = mg = 2.10^5 N$)

2. Faire le schéma correspondant $\alpha = \arctan\left(\frac{F_{ic}}{mg}\right) = 0,04^\circ$

Il faut donc incliner les rails de $0,04^\circ$ vers l'Est.

Exo 31 : Force d'inertie sur un wagon allant à l'est

1. On prend le même réf: $\mathfrak{R}_T = (O, \vec{e}_N, \vec{e}_W, \vec{e}_z)$, avec les vecteurs orientés vers le nord, l'ouest et vers le haut.

Ainsi, $\vec{v}_{M/\mathfrak{R}_T} = -v \cdot \vec{e}_W$.

La force de Coriolis est: $\vec{F}_{ic} = -2m \vec{\Omega}_{R_T/R_G} \wedge \vec{v}_{M/\mathfrak{R}_T}$, ce qui

donne
$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega v \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ 0 \\ \sin \lambda \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2m\omega v \cdot \begin{bmatrix} \sin \lambda \\ 0 \\ -\cos \lambda \end{bmatrix}$$

2 composantes, une partie vers le haut, l'autre vers le sud.

2. Composante dans le plan horizontal : vers le sud,

$$\vec{F}_{ic} \cdot \vec{e}_N = -2m\omega v \sin \lambda = -140N$$

Exo 32 : Lancement vertical d'un projectile

1. De manière approchée: $\vec{v}_{(t)} = \vec{v}_0 - \vec{g} \cdot t = (v_0 - gt) \cdot \vec{e}_z$

Ce qui donne :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega \cdot \begin{bmatrix} -\cos \lambda \\ 0 \\ \sin \lambda \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 - gt \end{bmatrix} = 2m\omega \cos \lambda (gt - v_0) \cdot \vec{e}_y$$

2. PFD sur le projectile :

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{bmatrix} = \vec{P} + \vec{F}_{ic} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2m\omega \cos \lambda (gt - v_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = \cancel{\dot{x}_{(0)}} \cdot t + \cancel{x_{(0)}} \\ y(t) = \Omega \cos \lambda \left(\frac{1}{3} gt^3 - v_0 t^2 \right) + \cancel{\dot{y}_{(0)}} \cdot t + \cancel{y_{(0)}} \\ z(t) = \frac{-1}{2} gt^2 + v_0 t + z(0) \end{cases}$$

3. Coordonnées approchées du point de retombée :

$$\begin{cases} t_{sol} = \frac{2v_0}{g} & \rightarrow \text{Déviation vers l'ouest} \\ y_{sol} = \frac{-4\Omega v_0^3 \cos \lambda}{3g^2} \end{cases}$$

Exo 33 : Déviation d'un palet

1. On prend le réf: $\mathfrak{R}_T = (O, \vec{e}_S, \vec{e}_E, \vec{e}_z) = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, avec les vecteurs orientés vers le Sud, l'Est et vers le haut.

Ainsi: $\vec{v}_{M/\mathfrak{R}_T} = v_0 \cdot \vec{e}_S$, la vitesse sera quasi constante (si on se place dans le réf galiléen, sans frottement)

Force de Coriolis: \rightarrow Vers l'OUEST

$$\vec{F}_{ic} = -2m\Omega v_0 \cdot \begin{bmatrix} -\cos \lambda \\ 0 \\ \sin \lambda \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{F}_{ic} = -2m\Omega v_0 \sin \lambda \cdot \vec{e}_E$$

2. Equations horaires: PFD sur le projectile dans R_T non galiléen (force d'entraînement déjà incluse dans le poids):

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{bmatrix} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_{ic} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2m\Omega v_0 \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\Omega v_0 t^2 \sin \lambda \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

3. Déviation $t_{mur} = d/v_0$

$$\Delta y = y(t_{mur}) = \frac{-2\pi d^2 \sin \lambda}{T_0 v_0} = 1,42m$$

4. On peut faire un calcul approché au pôle nord, en approximant la Terre par un plan horizontal qui tourne à la vitesse angulaire Ω . Ainsi, en $t_{mur} = d/v_0 = 50s$, le plan a tourné d'un angle $\alpha = \frac{2\pi \cdot t_{mur}}{T} = 0,2089^\circ$, de qui

correspond à une déviation sur le mur d'environ $\Delta y = d \cdot \tan \alpha \approx 1,823m$. On retrouve environ la valeur exprimée précédemment pour $\lambda = 90^\circ$:

$$\Delta y = \frac{-2\pi d^2 \sin \lambda}{T_0 v_0} = 1,823m$$

On voit que cette valeur est loin d'être négligeable, le caractère galiléen du référentiel terrestre peut être très rapidement mis en défaut... En réalité, les frottements atténuent cet effet, puisqu'ils ont tendance à faire tourner le palet et tout objet avec la Terre.